Prof. Dr. Hartmut Ring
Universität Siegen

http://mfi.math.uni-siegen.de

Diskrete Mathematik für Informatiker

Wintersemester 2010/2011

Übersicht

Vorlesung Kernstoff	Montag 16:10 - 17:40 PB-A 119	Dienstag 16:10 - 17:40 PB-A 119
Ergänzungen zur Vorlesung Motivation, Exkurse, Experimente (**mathGUIde**)	Montag 17:45 - 19:15 PB-A 119 **Beginn**: Mo, 25. 10. 2010	

Übersicht

Übungen

Letzte Ziffer der **Matrikelnummer**				**Beginn**
0, 1, 2	Mo	12:15 - 13:45	H-E 312	08.11
3, 4, 5	Do	14:15 - 15:45	H-E 312	04.11
6, 7, 8, 9	Fr	12:15 - 13:45	H-F 116	05.11

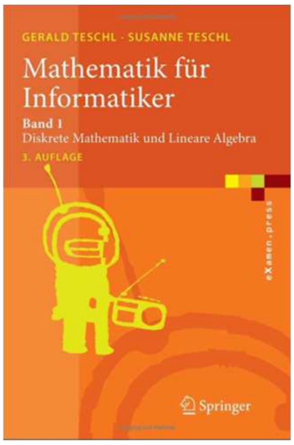
Regelmäßige Teilnahme ist Voraussetzung für die Klausurzulassung.

1. Übungsblatt: Ausgabe am Mittwoch, 20. 10. 2010
online als PDF: http://mfi.math.uni-siegen.de/dmi.html

Anmeldung und Abgabe des 1. Übungsblatts:
Di, 26. 10. 2010, 16:00 Uhr, PB-A 119 (vor der Vorlesung)

Die weiteren Übungen werden in der Übungsgruppe abgegeben.

Literatur



Teschl, Gerald, Teschl, Susanne
Mathematik für Informatiker
Band 1: Diskrete Mathematik
und Lineare Algebra

Springer, Berlin, 3. Aufl., 2008, 514 S.
ISBN: 978-3-540-77431-0

Preis: 24,95 €

Das Buch steht in der Universitätsbibliothek als „Elektronische Ressource“ zur Verfügung, wenn Sie sich im Intranet der Uni befinden.

Online-Ressourcen

www.mathematik.uni-siegen.de/ring

↓

http://mfi.math.uni-siegen.de

- /dmi.html
- /mi-test/test.php

www.mathGUI.de

Inhaltsübersicht

- **Einführungsprojekt**
  - Zahlensummen

- **Logik und Mengen**
  - Elementare Aussagenlogik
  - Elementare Mengenlehre
- **Zahlenmengen und Zahlensysteme**
  - Die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$
  - Summen und Produkte
  - Vollständige Induktion
  - Stellenwertsysteme
  - Teilbarkeit und Primzahlen
- **Grundbegriffe der Algebra**
  - Gruppen
  - Ringe und Körper
  - Homomorphismen und Isomorphismen
- **Elementare Zahlentheorie**
  - Der Euklidische Algorithmus
  - Primzahlen
  - Der Satz von Euler/Fermat
  - Chiffriersysteme mit öffentlichen Schlüsseln
  - Der Chinesische Restsatz
- **Polynomringe und endliche Körper**
  - Der Polynomring $\mathbb{K}[x]$
  - Der Restklassenring $\mathbb{K}[x]_{m(x)}$
  - Endliche Körper
- **Relationen und Abbildungen**
  - Binäre Relationen
  - Abbildungen
- **Elementare Kombinatorik**
  - Binomialkoeffizienten
  - Grundlegende Abzählverfahren
  - Permutationen und Kombinationen
  - Wahrscheinlichkeit
- **Rekursionen und Wachstum von Algorithmen**
  - Grundbegriffe
  - Lineare Rekursionen
  - Wachstum von Algorithmen

Vorschau:
Lineare Algebra für Informatiker,
Sommersemester 2011

Lineare Algebra
- Vektorräume
- Matrizen und lineare Abbildungen
- Lineare Gleichungen
- Skalarprodukt und Orthogonalität
- Eigenwerte und Eigenvektoren

Graphentheorie
- Grundlagen der Graphentheorie
- Bäume und kürzeste Wege
- Flüsse in Netzwerken und Matchings

Einführungsprojekt:
Summe der Zahlen von 1 bis *n*

Carl Friedrich Gauß
1777-1855

Erst 1784 (im Alter von sieben Jahren) kam Gauß in die Volksschule. Dort stellte (1786) sein Lehrer Büttner seinen Schülern die Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 100 zu summieren. Büttner hatte die Aufgabe kaum ausgesprochen, als Gauß die Tafel mit den Worten „Ligget se“ auf den Tisch wirft.

$$1+2+3+\ldots+100=\sum_{i=1}^{100} i$$

Summe der ersten n natürlichen Zahlen

$$1+2+3+\ldots+n=\sum_{i=1}^{n} i$$

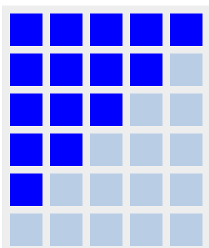
$$\sum_{i=n_0}^{n_1} f(i)$$

mathGUIde

```
sum([f(i) for i in fromTo(n0, n1)])
```

Missbrauch des Computers:

```
sum([i for i in fromTo(1, 100)])
```



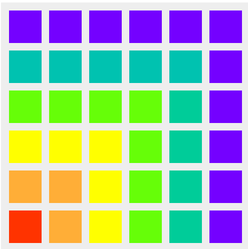
$$2\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

```
def sum1(n):
    return n*(n+1)/2
```

Summe der ersten n natürlichen Zahlen

9



$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$$

$$2\sum_{i=1}^{n} i - n = n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Summe der Quadratzahlen

10

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\sum_{i=1}^{n} i^2$$

upper limit

expression

variable

lower limit

Derive

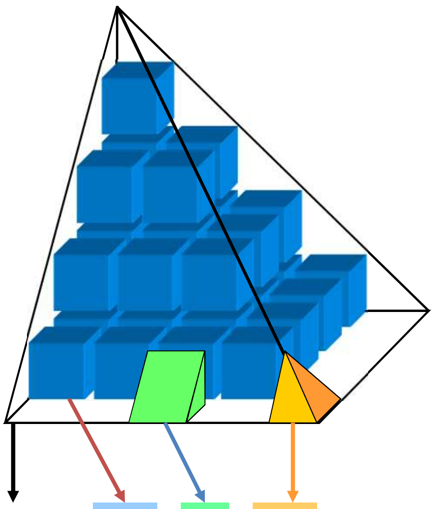
Menü:

COMMAND → Calculus → Sum →

```
expression:    i^2
variable:      i
lower limit:   1
upper limit:   n
```

Summe der Quadratzahlen

11



$$\frac{(n+1)^3}{3} = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i + \frac{n+1}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n+1}{3}$$

$$= \frac{(n+1)[2(n+1)^2 - 3n - 2]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + n)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

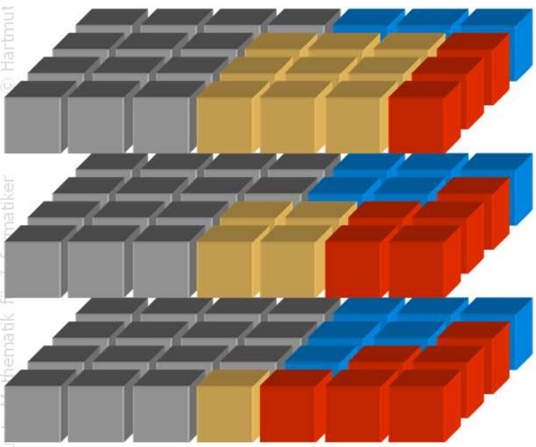
mathGUIde

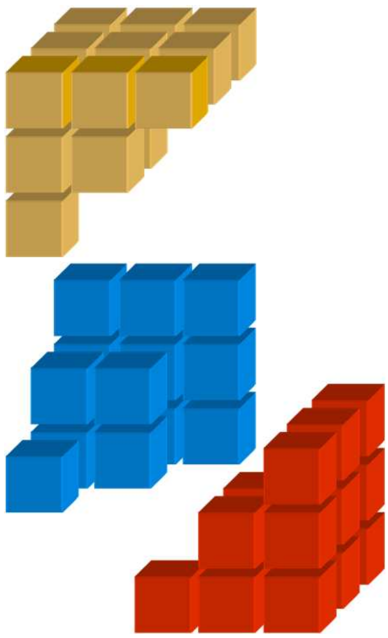
```
def sum2(n):
    return n*(n+1)*(2*n+1)/6
```

Summe der Quadratzahlen

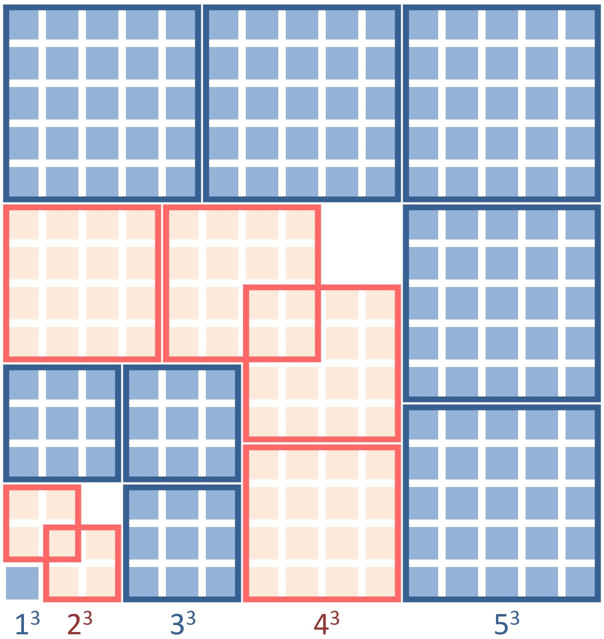
12

$$6\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)$$





Summe der dritten Potenzen



$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Summe i^k ist Polynom k+1-ten Grades

Beispiel: $k = 2$

$$\begin{aligned} n^3 = n^3 &- (n-1)^3 \\ &+ (n-1)^3 - (n-2)^3 \\ &+ (n-2)^3 - (n-3)^3 \\ &+ \ldots \\ &+ 3^3 - 2^3 \\ &+ 2^3 - 1^3 \\ &+ 1^3 - 0^3 \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [i^3 - (i-1)^3] \quad = \sum_{i=1}^{n} (3i^2 - 3i + 1)$$

$$n^3 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 3\sum_{i=1}^{n} i + n \qquad \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \sum_{i=1}^{n} i - \frac{n}{3}$$

Summe der Quadratzahlen

15

Ansatz: Kubisches Polynom

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = an^3 + bn^2 + cn + d$$

$n = \mathbf{0}$

$$0 = a0^3 + b0^2 + c0 + d \Rightarrow d = 0$$

1 $\quad a + b + c = 1 \qquad 8a + 8b + 8c = 8 \qquad 27a + 27b + 27c = 27$

2 $\quad 8a + 4b + 2c = 5 \qquad 4b + 6c = 3$

3 $\quad 27a + 9b + 3c = 14 \qquad 18b + 24c = 13$

$$a = \frac{1}{3} \qquad 36b + 54c = 27$$

$$c = \frac{1}{6} \qquad 6c = 1 \qquad 36b + 48c = 26$$

$$b = \frac{1}{2} \qquad 4b + 1 = 3$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Summe der Quadratzahlen

16

Ansatz: Kubisches Polynom

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \quad x_1 n^1 + x_2 n^2 + x_3 n^3$$

$$\sum_{i=1}^{0} i^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

$$\begin{aligned} n = 1 \quad & 1^1\, x_1 + 1^2\, x_2 + 1^3\, x_3 = 1^2 \\ n = 2 \quad & 2^1\, x_1 + 2^2\, x_2 + 2^3\, x_3 = 1^2 + 2^2 \\ n = 3 \quad & 3^1\, x_1 + 3^2\, x_2 + 3^3\, x_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1^1 & 1^2 & 1^3 \\ 2^1 & 2^2 & 2^3 \\ 3^1 & 3^2 & 3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1^2 \\ 1^2 + 2^2 \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Summe der Quadratzahlen

Ansatz: Kubisches Polynom $\sum_{i=1}^{n} i^2 = x_1 n^1 + x_2 n^2 + x_3 n^3$

mathGUIde

```
def squareSum(n):
    return sumF(1,n, lambda i: i^2)

b = Vector.fromFunction(3,    squareSum,        1)
A = Matrix.fromFunction(3,3,  lambda i,k: i^k,  1)

x = A.solve(b)
print(x)
```

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1^1 & 1^2 & 1^3 \\ 2^1 & 2^2 & 2^3 \\ 3^1 & 3^2 & 3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1^2 \\ 1^2 + 2^2 \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Summe der k-ten Potenzen

Polynom-Ansatz: $\sum_{i=1}^{n} i^k = x_1 n^1 + x_2 n^2 + \ldots + x_{k+1} n^{k+1}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1^1 & 1^2 & \cdots & 1^{k+1} \\ 2^1 & 2^2 & \cdots & 2^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (k+1)^1 & (k+1)^2 & \cdots & (k+1)^{k+1} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1^k \\ 1^k + 2^k \\ \vdots \\ 1^k + 2^k + \ldots + (k+1)^k \end{pmatrix}$$

mathGUIde

```
def polySum(i,k):
    return sumF(1,i, lambda j: j^k)

def sumSolve(k):
    A = Matrix.fromFunction(k+1,k+1, lambda i,j: i^j, 1)
    b = Vector.fromFunction(k+1, lambda i: polySum(i,k), 1)
    return A.solve(b)
```