Prof. Dr. Hartmut Ring
Universität Siegen

Diskrete Mathematik für Informatiker
Wintersemester 2009/2010

2. Zahlenmengen und Zahlensysteme

Die ganzen Zahlen

Definition 2.1

Die Menge $\mathbb{N}$ der ***Natürlichen Zahlen*** ist definiert durch die *Peano-Axiome*

Guiseppe Peano
1858 - 1932

(P1) 1 ist eine natürliche Zahl.

(P2) Jede natürliche Zahl besitzt eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl als Nachfolger.

(P3) 1 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl.

(P4) Verschiedene natürliche Zahlen haben verschiedene Nachfolger.

(P5) Gilt eine Aussage, die eine natürliche Zahl als Parameter enthält, für 1, und folgt aus der Gültigkeit der Aussage für eine natürliche Zahl die Gültigkeit für deren Nachfolger, so gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen.

Aus **(P5)** ergibt sich das Beweisprinzip der ***Vollständigen Induktion***

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

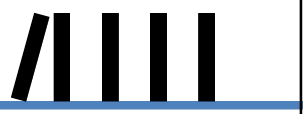
Prinzip der Vollständigen Induktion

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

A*(*n*)** sei eine Aussage für eine natürliche Zahl ***n

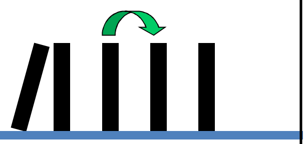
Induktionsanfang
(Induktionsbasis, Induktionsverankerung)

$$A(1)$$



Induktionsschritt

$$\forall n \in \mathbb{N} : \big(A(n) \Rightarrow A(n+1) \big)$$



Satz 2.25

Wenn Induktionsanfang und Induktionsschritt gelten, dann ist die Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen n richtig.

Prinzip der Vollständigen Induktion

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

Zu zeigen: Eine Aussage ***A*(*n*) gilt**
für alle natürlichen Zahlen *n*

…

Induktionsanfang

Behauptung:
***A*(1)**

…

Beweis

…

Induktionsschritt

Voraussetzung:
Für ein beliebiges n
gilt $A(n)$

…

Behauptung: $A(n+1)$

…

Beweis (Voraussetzung verwenden!)

$A(n+1)$ mit Hilfe von $A(n)$ ausdrücken
und für $A(n)$ die Induktionsvoraussetzung
verwenden!

Vollständige Induktion (Beispiel 1)

Zu zeigen: Eine Aussage ***A*(*n*) gilt**
für alle natürlichen Zahlen *n*

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

Induktionsanfang

Behauptung:
***A*(1)**

$$\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2}$$

Beweis

trivial

Induktionsschritt

Voraussetzung:
Für ein beliebiges n
gilt $A(n)$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Behauptung: $A(n+1)$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Beweis (Voraussetzung verwenden!)

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Vollständige Induktion (Beispiel 2)

Zu zeigen: Eine Aussage ***A*(*n*) gilt**
für alle natürlichen Zahlen *n*

$$(5^n - 1) \bmod 4 = 0$$

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

Induktionsanfang

Behauptung:
***A*(1)**

$$(5^1 - 1) \bmod 4 = 0$$

Beweis

trivial

Induktionsschritt

Voraussetzung:
Für ein beliebiges n
gilt $A(n)$

$$(5^n - 1) \bmod 4 = 0$$

Behauptung: $A(n+1)$

$$(5^{n+1} - 1) \bmod 4 = 0$$

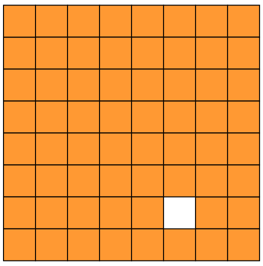
Beweis (Voraussetzung verwenden!)

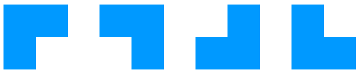
$$(5^{n+1} - 1) \bmod 4 = (5(5^n - 1) + 4) \bmod 4$$

$$= 5\ (5^n - 1) \bmod 4 = 0$$

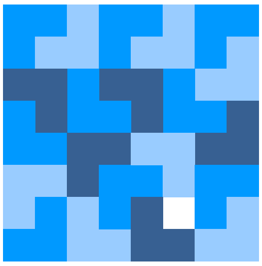
Vereinfachung durch Verallgemeinerung

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010





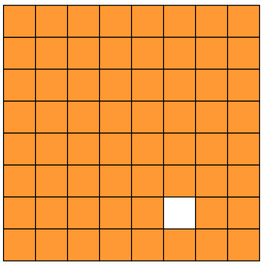
Kann man ein Brett mit 8 mal 8 quadratischen Feldern, von denen ein beliebiges fehlt, in Winkelsteine zerlegen?

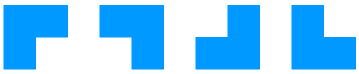


Eine Lösung für das Beispiel

Vereinfachung durch Verallgemeinerung

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010





Verallgemeinerung:
Kann man ein Brett mit 2^n mal 2^n quadratischen Feldern, von denen ein beliebiges fehlt, in Winkelsteine zerlegen (für beliebiges n) ?

Beweis durch Vollständige Induktion!

Vereinfachung durch Verallgemeinerung

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

Induktionsanfang: Man kann ein Brett mit 2^1 mal 2^1 quadratischen Feldern, von denen ein beliebiges fehlt, in Winkelsteine zerlegen.

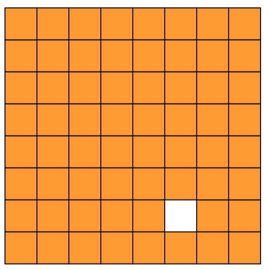
klar!

Vereinfachung durch Verallgemeinerung

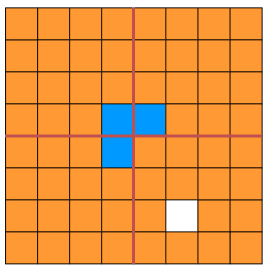
Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

Induktionsschritt:

Voraussetzung: Für ein beliebiges n kann man ein Brett mit 2^n mal 2^n quadratischen Feldern, von denen ein beliebiges fehlt, in Winkelsteine zerlegen.
Behauptung: Man kann ein Brett mit 2^{n+1} mal 2^{n+1} quadratischen Feldern, von denen ein beliebiges fehlt, in Winkelsteine zerlegen.



2^{n+1}



2^n 2^n

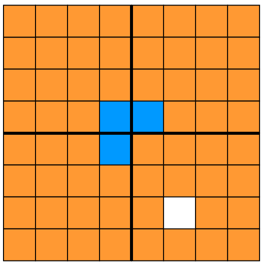
Die vier Teilquadrate lassen sich nach Voraussetzung zerlegen.

Vereinfachung durch Verallgemeinerung

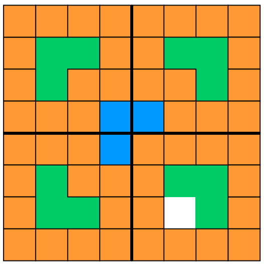
© Hartmut Ring, 2010 Diskrete Mathematik für Informatiker

Induktionsschritt:

Voraussetzung: Für ein beliebiges n kann man ein Brett mit 2^n mal 2^n quadratischen Feldern, von denen ein beliebiges fehlt, in Winkelsteine zerlegen.
Behauptung: Man kann ein Brett mit 2^{n+1} mal 2^{n+1} quadratischen Feldern, von denen ein beliebiges fehlt, in Winkelsteine zerlegen.



2^n 2^n



Die vier Teilquadrate lassen sich nach Voraussetzung zerlegen.

Vollständige Induktion?

© Hartmut Ring, 2010 Diskrete Mathematik für Informatiker

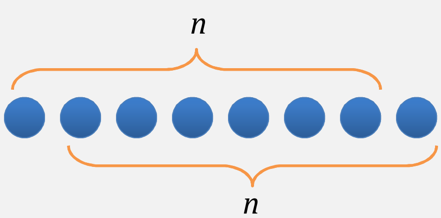
Alle Äpfel sind blau!

Vorbereitung: Man nehme einen Apfel und lackiere ihn blau.

Präzisere Behauptung:
In jeder Menge mit n Äpfeln haben alle Äpfel die gleiche Farbe.

Induktionsanfang: n = 1 (klar!)

Induktionsschritt:



Da nun alle Äpfel die gleiche Farbe haben und mein Apfel blau ist, sind alle Äpfel blau!

Starke Induktion

© Hartmut Ring, 2010
Diskrete Mathematik für Informatiker

A*(*n*)** sei eine Aussage über die natürliche Zahl ***n

Induktionsanfang
(Induktionsbasis, Induktionsverankerung)

$$A(1)$$

Induktionsschritt

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \left(\forall i \leq n : A(i) \Rightarrow A(n+1)\right)}$$

Wenn Induktionsanfang und Induktionsschritt gelten,
dann ist die Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen n richtig.

Starke Induktion

© Hartmut Ring, 2010
Diskrete Mathematik für Informatiker

Zu zeigen: Eine Aussage ***A*(*n*) gilt**
für alle natürlichen Zahlen *n* ...

Induktionsanfang

Behauptung:
***A*(1)**

...

Beweis

...

Induktionsschritt

Voraussetzung:
Für ein beliebiges n gilt
$\mathbf{A(1), A(2), \ldots, A(n)}$

...

Behauptung: $A(n+1)$

...

Beweis (Voraussetzung verwenden!)

$A(n+1)$ mit Hilfe von $A(1), \ldots, A(n)$ ausdrücken
und für $A(n)$ die Induktionsvoraussetzung
verwenden!

Starke Induktion (Beispiel)

Zu zeigen: Eine Aussage $\boldsymbol{A(n)}$ **gilt für alle natürlichen Zahlen n**

n lässt sich als Produkt von Primzahlen darstellen

Induktionsanfang

Behauptung: $\boldsymbol{A(1)}$

1 lässt sich als Produkt von Primzahlen darstellen.

Beweis

„leeres Produkt"

Induktionsschritt

Voraussetzung: Für ein beliebiges n gilt $A(1), A(2), \ldots, \boldsymbol{A(n)}$

1, 2, ... n lassen sich als Produkt von Primzahlen darstellen.

Behauptung: $A(n+1)$

n+1 lässt sich als Produkt von Primzahlen darstellen.

Beweis (Voraussetzung verwenden!)

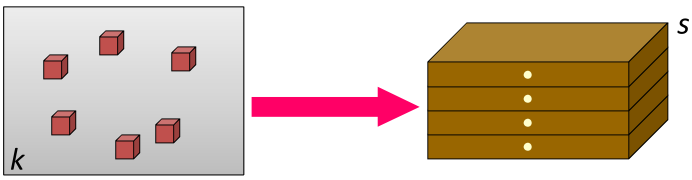
Entweder ist n+1 eine Primzahl und damit Produkt (aus 1 Primzahl)

oder n+1 besitzt einen Teiler t mit $1 < t < n+1$.
Dann ist $(n+1) / t$ eine natürliche Zahl s mit $1 < s < n+1$.
Nach Voraussetzung lassen sich t und s als Produkte von Primzahlen darstellen und damit auch $n+1 = t\,s$.

© Hartmut Ring, 2010 Diskrete Mathematik für Informatiker

Das Schubfachprinzip

Wenn in s Schubfächern k Gegenstände liegen und $k > s$ ist,
dann liegen in (mindestens) einem Schubfach (mindestens) zwei Gegenstände.



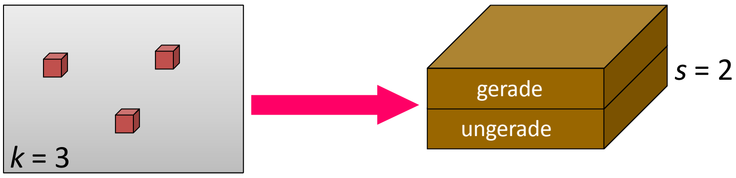
K und S seien endliche Mengen mit $|K| > |S|$.
Dann gibt es keine injektive Abbildung von K nach S.

© Hartmut Ring, 2010 Diskrete Mathematik für Informatiker

Das Schubfachprinzip: Beispiel

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

Unter drei ganzen Zahlen befinden sich immer zwei, deren arithmetisches Mittel eine ganze Zahl ist.



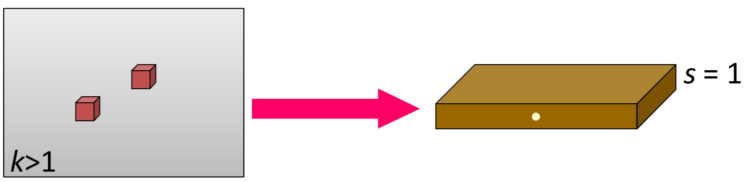
Das Schubfachprinzip

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

Wenn in s Schubfächern k Gegenstände liegen und $s < k$ ist, dann liegen in (mindestens) einem Schubfach (mindestens) zwei Gegenstände.

Beweis durch Vollständige Induktion (über s):

Induktionsanfang ($s = 1$):
Wenn in 1 Schubfach $k > 1$ Gegenstände liegen, dann liegen in (mindestens) einem Schubfach (mindestens) zwei Gegenstände.



Das Schubfachprinzip

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

Wenn in *s* Schubfächern *k* Gegenstände liegen und *s* < *k* ist, dann liegen in (mindestens) einem Schubfach (mindestens) zwei Gegenstände.

Beweis durch Vollständige Induktion (über *s*):

Induktionsschritt:

Voraussetzung:

Wenn in *s* Schubfächern *k* Gegenstände liegen und *s* < *k* ist, dann liegen in (mindestens) einem Schubfach (mindestens) zwei Gegenstände.

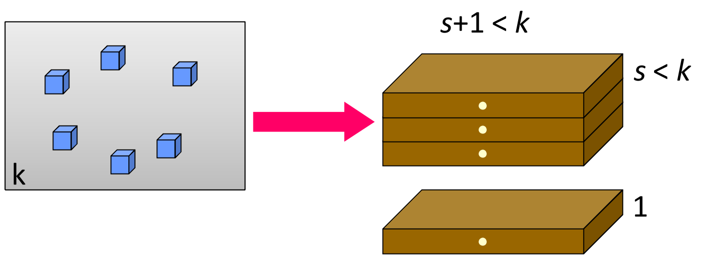
Behauptung:

Wenn in *s*+1 Schubfächern *k* Gegenstände liegen und *s*+1 < *k* ist, dann liegen in (mindestens) einem Schubfach (mindestens) zwei Gegenstände.

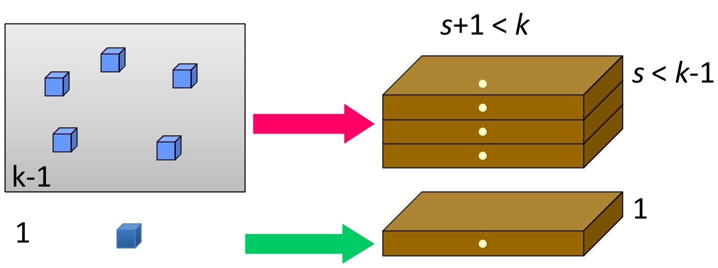
Das Schubfachprinzip (Induktionsschritt)

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

Fall 1: Kein Element liegt im „neuen" Schubfach.



Fall 2: Ein Element liegt im „neuen" Schubfach.



Fall 3: Mehr als ein Element liegt im „neuen" Schubfach.

Das Schubfachprinzip (Induktionsschritt)

Das **Schubfachprinzip** ist sogar
äquivalent zur Vollständigen Induktion

Das Prinzip der **Vollständigen Induktion**
ist auch äquivalent zum

Prinzip vom kleinsten Element:
Jede nicht leere Menge von natürlichen Zahlen
hat ein kleinstes Element.

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

Ganze Zahlen

Definition 2.2

Die Gleichung $a + x = b$
ist in $\mathbb{N}$ nicht immer lösbar.
Man erweitert deshalb zur

Menge $\mathbb{Z}$ der ***ganzen Zahlen***:

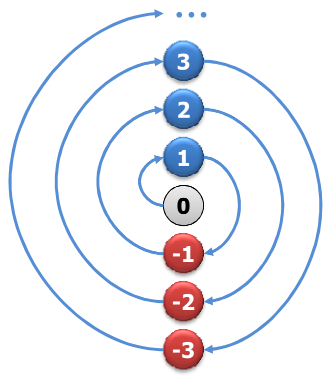
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} - \mathbb{N}$

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

Die ganzen Zahlen sind aufzählbar!

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010



Eine unendliche Menge M heißt ***aufzählbar***, wenn man sie mit Hilfe der natürlichen Zahlen durchnummerieren kann.
(genauer: wenn es eine bijektive Abbildung $f: M \to \mathbb{N}$ gibt)

Rationale Zahlen

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

Definition 2.3

Die Gleichung $a\,x = b$ (für $a \neq 0$) ist in $\mathbb{Z}$ nicht immer lösbar.
Man erweitert deshalb zur Menge

Menge $\mathbb{Q}$ der ***rationalen Zahlen***:

$$\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \}$$

$\mathbb{Q} = \mathbb{Z}/\mathbb{N}$

Standarddarstellung:
m und n teilerfremd (gekürzt)

Die rationalen Zahlen sind aufzählbar

© Hartmut Ring, 2010
Diskrete Mathematik für Informatiker

$\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}_+$
1	1
2	2
3	1/2
4	1/3
5	3
6	4
7	3/2
8	2/3
9	1/4
10	1/5
11	5
12	6

1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1	7/1	8/1
1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2	7/2	8/2
1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3	7/3	8/3
1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4	7/4	8/4
1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	6/5	7/5	8/5
1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	7/6	8/6
1/7	2/7	3/7	4/7	5/7	6/7	7/7	8/7
1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8	8/8

Reelle Zahlen

© Hartmut Ring, 2010
Diskrete Mathematik für Informatiker

Definition 2.7

Die ***reellen Zahlen*** können als die
Menge aller Dezimalbrüche angesehen werden:

$$\mathbb{R} = \left\{ n + \sum_{i=1}^{\infty} a_i 10^{-i} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}, a_i \in \{0,1,2,\ldots,9\} \right\}$$

Beispiel: $\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{\infty} 3 \cdot 10^{-i}$

Es gilt: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Frage: Ist $\mathbb{Q} = \mathbb{R}$?

Reelle Zahlen

Satz 2.6

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl (Euklid, ca. 365 – 300 v.Chr.)

Also: $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$

Widerspruchsbeweis:
Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational.

$\Rightarrow$ Es gibt **teilerfremde natürliche Zahlen *p* und *q*** mit $\sqrt{2} = p/q$.

$\Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ ist eine gerade Zahl und damit auch p.

$\Rightarrow$ Es gibt eine natürliche Zahl k mit $p = 2k$.

$\Rightarrow 2q^2 = 4k^2$ oder $q^2 = 2k^2$.

$\Rightarrow q^2$ ist eine gerade Zahl und damit auch q.

$\Rightarrow$ ***p* und *q* sind nicht teilerfremd**.

$\Rightarrow$ Annahme war falsch. Also ist $\sqrt{2}$ nicht rational.

Definition

Reelle Zahlen, die nicht rational sind, heißen ***irrationale Zahlen***.

© Hartmut Ring, 2010 Diskrete Mathematik für Informatiker

Reelle Zahlen

$\sqrt{3}$ ist keine rationale Zahl

Indirekter **Beweis**:
Annahme: $\sqrt{3}$ ist rational.

$\Rightarrow$ Es gibt teilerfremde natürliche Zahlen p und q mit $\sqrt{3} = p/q$.

$\Rightarrow 3q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ ist durch 3 teilbar und damit auch p.

$\Rightarrow$ Es gibt eine natürliche Zahl k mit $p = 3k$.

$\Rightarrow 3q^2 = 9k^2$ oder $q^2 = 3k^2$.

$\Rightarrow q^2$ ist durch 3 teilbar und damit auch q.

$\Rightarrow p$ und q sind nicht teilerfremd.

$\Rightarrow$ Annahme war falsch. Also ist $\sqrt{3}$ irrational.

© Hartmut Ring, 2010 Diskrete Mathematik für Informatiker

Wo steckt der Fehler?

© Hartmut Ring, 2010
Diskrete Mathematik für Informatiker

Behauptung

$\sqrt{4}$ ist keine rationale Zahl

Indirekter **Beweis**:
Annahme: $\sqrt{4}$ ist rational.

$\Rightarrow$ Es gibt teilerfremde natürliche Zahlen p und q mit $\sqrt{4} = p/q$.

$\Rightarrow 4q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ ist durch 4 teilbar und damit auch p.

$\Rightarrow$ Es gibt eine natürliche Zahl k mit $p = 4k$.

$\Rightarrow 4q^2 = 16k^2$ oder $q^2 = 4k^2$.

$\Rightarrow q^2$ ist durch 4 teilbar und damit auch q.

$\Rightarrow p$ und q sind nicht teilerfremd.

$\Rightarrow$ Annahme war falsch. Also ist $\sqrt{4}$ irrational.

Irrationale Zahlen

© Hartmut Ring, 2010
Diskrete Mathematik für Informatiker

Reelle Zahlen, die nicht rational sind, heißen ***irrationale Zahlen***.

Beispiele: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, e

Satz

Die reellen Zahlen sind nicht aufzählbar!

Gauß-Klammern

© Hartmut Ring, 2010 Diskrete Mathematik für Informatiker

Definition

Für alle reellen Zahlen x wird definiert:

$\lfloor x \rfloor := \max \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x \}$

$\lceil x \rceil := \min \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x \}$

In der Mathematik wird meist $[x]$ statt $\lfloor x \rfloor$ geschrieben (Gauß-Klammer)

Satz

Es gilt $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x+1$

Das Summensymbol

© Hartmut Ring, 2010 Diskrete Mathematik für Informatiker

Definition 2.20

Summensymbol:

$$\sum_{i=a}^{b} f(i)$$

hat den durch folgende Python-Funktion definierten Wert

```
def sigma(a, b, f):
    s = 0
    i = a
    while i <= b:
        s += f(i)
        i += 1
    return s
```

Beispiel

Summe der ersten 100 Quadratzahlen:

```
def f(i):
    return i*i

print(sigma(1, 100, f))
```

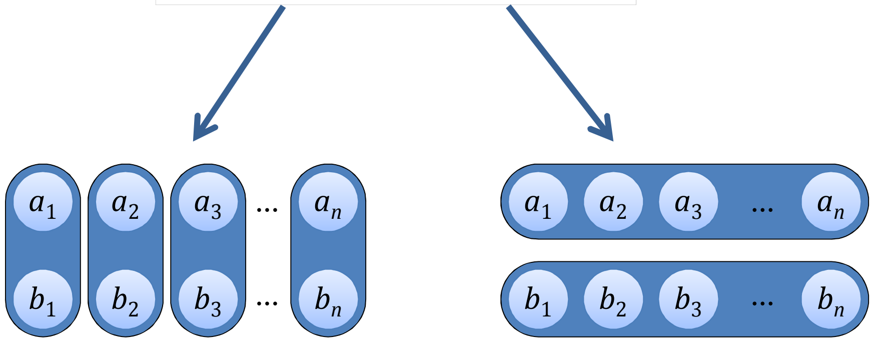
Das Summensymbol

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

Satz 2.22

Für reelle oder komplexe Zahlen a_i, b_i gilt

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$



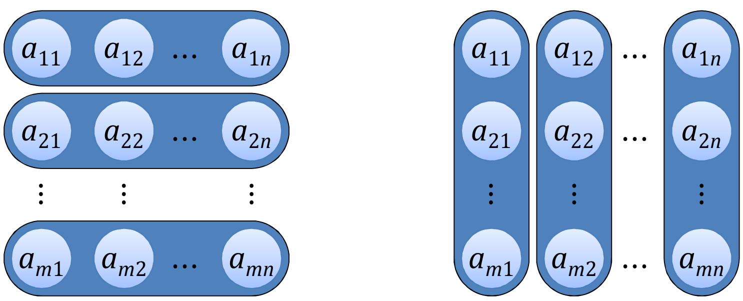
Das Summensymbol

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

Satz 2.24

Für reelle oder komplexe Zahlen a_{ik} gilt

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ik}$$



Das Summensymbol

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

„Ausmultiplizieren"

Für reelle oder komplexe Zahlen c, a_i gilt

$$\sum_{i=1}^{n} c a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Beispiel

$$\sum_{i=1}^{n}\left(3i^2+5\right)=\sum_{i=1}^{n}3i^2+\sum_{i=1}^{n}5 = 3\sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{i=1}^{n}5$$

$$=3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+5n$$

Das Produktsymbol

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

Definition 2.20

Produktsymbol:

$$\prod_{i=a}^{b} f(i)$$

hat den durch folgende Python-Funktion definierten Wert

```
def product(a, b, f):
    p = 1
    i = a
    while i <= b:
        p *= f(i)
        i += 1
    return p
```

Beispiel

Fakultät:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i$$

```
def f(i):
    return i

print(product(1, 5, f))
```

Ergebnis: 5! = 120

Stellenwertdarstellung reeller Zahlen

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

Definition 2.20

Die ***Dezimalzahl***

$a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-n}$

ist definiert als

$$\sum_{i=-n}^{m} a_i 10^i$$

Dabei müssen alle ***Stellen*** ($a_{-n} \ldots a_m$) ***Dezimalziffern*** (im Bereich {0, 1, 2, ..., 9} sein

Verallgemeinerung

Die ***Stellenwertdarstellung***

$a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots$

zur ***Basis*** *b* ist definiert als

$$\sum_{i=-\infty}^{m} a_i b^i$$

Ziffern aus {0, 1, 2, ..., *b*-1}

Stellenwertdarstellung reeller Zahlen

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

Stellenwertdarstellung der positiven reellen Zahl *x* zur **Basis** $b \in \mathbb{N}$ $(b > 1)$

$$a_m \ldots a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots$$

mit

$$m = \lfloor \log_b x \rfloor$$

$$a_i = \lfloor b^{-i} x \rfloor - b \lfloor b^{-i-1} x \rfloor$$

Stellenwertdarstellung reeller Zahlen

$a_m \ldots a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots$ $\quad m = \lfloor \log_b x \rfloor$ $\quad a_i = \lfloor b^{-i} x \rfloor - b \lfloor b^{-i-1} x \rfloor$

Beispiel: Zahl π zur Basis 10

$$m = \lfloor \log_{10} \pi \rfloor = 0$$

a_0	=	$\lfloor 10^0 \pi \rfloor - 10 \lfloor 10^{-1} \pi \rfloor$	=	$\lfloor 3{,}1\ldots \rfloor - 10 \lfloor 0{,}3\ldots \rfloor$	=	3-0	=	3 ,
a_{-1}	=	$\lfloor 10^1 \pi \rfloor - 10 \lfloor 10^0 \pi \rfloor$	=	$\lfloor 31{,}\ldots \rfloor - 10 \lfloor 3{,}\ldots \rfloor$	=	31-30	=	1
a_{-2}	=	$\lfloor 10^2 \pi \rfloor - 10 \lfloor 10^1 \pi \rfloor$	=	$\lfloor 314{,}\ldots \rfloor - 10 \lfloor 31{,}\ldots \rfloor$	=	314-310	=	4

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

Stellenwertdarstellung reeller Zahlen

$a_m \ldots a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots$ $\quad m = \lfloor \log_b x \rfloor$ $\quad a_i = \lfloor b^{-i} x \rfloor - b \lfloor b^{-i-1} x \rfloor$

Beispiel: Zahl π zur Basis 2

$$m = \lfloor \log_2 \pi \rfloor = 1$$

a_1	=	$\lfloor 2^{-1} \pi \rfloor - 2 \lfloor 2^{-2} \pi \rfloor$	=	$\lfloor 1{,}5\ldots \rfloor - 2 \lfloor 0{,}7\ldots \rfloor$	=	1-0	=	1
a_0	=	$\lfloor 2^0 \pi \rfloor - 2 \lfloor 2^{-1} \pi \rfloor$	=	$\lfloor 3{,}1\ldots \rfloor - 2 \lfloor 1{,}5\ldots \rfloor$	=	3-2	=	1 ,
a_{-1}	=	$\lfloor 2^1 \pi \rfloor - 2 \lfloor 2^0 \pi \rfloor$	=	$\lfloor 6{,}2\ldots \rfloor - 2 \lfloor 3{,}1\ldots \rfloor$	=	6-6	=	0
a_{-2}	=	$\lfloor 2^2 \pi \rfloor - 2 \lfloor 2^1 \pi \rfloor$	=	$\lfloor 12{,}5\ldots \rfloor - 2 \lfloor 6{,}2\ldots \rfloor$	=	12-12	=	0
a_{-3}	=	$\lfloor 2^3 \pi \rfloor - 2 \lfloor 2^2 \pi \rfloor$	=	$\lfloor 25{,}1\ldots \rfloor - 2 \lfloor 12{,}5\ldots \rfloor$	=	25-24	=	1

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

Stellenwertdarstellung reeller Zahlen

$a_m \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots$ | $m = \lfloor \log_b x \rfloor$ | $a_i = \lfloor b^{-i} x \rfloor - b \lfloor b^{-i-1} x \rfloor$

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

Eigenschaften der Stellenwertdarstellung

1. $a_i \in \{0,1,\ldots,b-1\} \quad (\forall i \in \mathbb{Z})$ — erlaubte Ziffern
2. $i > m \Rightarrow a_i = 0$
3. $a_m \neq 0$

(2 und 3:) höchste Stelle

4. $\sum_{i=n}^{m} a_i b^i \leq x < \sum_{i=n}^{m} a_i b^i + b^n$ — korrekte Approximation

Stellenwertdarstellung reeller Zahlen

$a_m \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots$ | $m = \lfloor \log_b x \rfloor$ | $a_i = \lfloor b^{-i} x \rfloor - b \lfloor b^{-i-1} x \rfloor$

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

1. $a_i \in \{0,1,\ldots,b-1\} \quad (\forall i \in \mathbb{Z})$ — erlaubte Ziffern

Beweis:

$$a_i = \lfloor b^{-i} x \rfloor - b \lfloor b^{-i-1} x \rfloor < b^{-i} x - b\left(b^{-i-1} x - 1\right) = b$$

$$a_i > \left(b^{-i} x - 1\right) - b\left(b^{-i-1} x\right) = -1$$

Daraus folgt die Behauptung wegen $a_i \in \mathbb{Z}$.

Stellenwertdarstellung reeller Zahlen

$a_m \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots$ | $m = \lfloor \log_b x \rfloor$ | $a_i = \lfloor b^{-i} x \rfloor - b \lfloor b^{-i-1} x \rfloor$

2. $i > m \Rightarrow a_i = 0$
3. $a_m \neq 0$

$\}$ höchste Stelle

Beweis:

Nach Def. ist $m = \lfloor \log_b x \rfloor$, also:

$m \le \log_b x < m+1 \Rightarrow b^m \le x < b^{m+1} \Rightarrow \boxed{b^{-1} \le b^{-m-1} x < 1}$ (a)

$i > m \Rightarrow \quad 0 < b^{-i-1} x < b^{-i} x \le b^{-m-1} x < 1$

Also ist $\lfloor b^{-i} x \rfloor = 0$ und $\lfloor b^{-i-1} x \rfloor = 0$

Nach Def. ist $a_i = \lfloor b^{-i} x \rfloor - b \lfloor b^{-i-1} x \rfloor = 0 - 0 = 0$

© Hartmut Ring, 2010 Diskrete Mathematik für Informatiker

Stellenwertdarstellung reeller Zahlen

$a_m \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots$ | $m = \lfloor \log_b x \rfloor$ | $a_i = \lfloor b^{-i} x \rfloor - b \lfloor b^{-i-1} x \rfloor$

2. $i > m \Rightarrow a_i = 0$
3. $a_m \neq 0$

$\}$ höchste Stelle

Beweis: $\boxed{b^{-1} \le b^{-m-1} x < 1}$ (a)

$m \le \log_b x \Rightarrow b^m \le x$
$\Rightarrow x b^{-m} \ge 1$

(a) $\Rightarrow \quad 0 < b^{-m-1} x < 1$

Mit der Def. folgt $a_m = \lfloor b^{-m} x \rfloor - b \lfloor b^{-m-1} x \rfloor \ge 1 - 0 = 1$

© Hartmut Ring, 2010 Diskrete Mathematik für Informatiker

Stellenwertdarstellung reeller Zahlen

$a_m \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots$ | $m = \lfloor \log_b x \rfloor$ | $a_i = \lfloor b^{-i} x \rfloor - b \lfloor b^{-i-1} x \rfloor$

4 $$\sum_{i=n}^{m} a_i b^i \le x < \sum_{i=n}^{m} a_i b^i + b^n$$ korrekte Approximation

(4.1 bezieht sich auf $\le$, 4.2 auf $<$)

$b^{-1} \le b^{-m-1} x < 1$ (a)

Beweis:

4.1 O.B.d.A. sei $n \le m$. Nach der Def. von a_i ist

$$\sum_{i=n}^{m} a_i b^i = \sum_{i=n}^{m} \lfloor b^{-i} x \rfloor b^i - \sum_{i=n}^{m} \lfloor b^{-(i+1)} x \rfloor b^{i+1} = \sum_{i=n}^{m} \lfloor b^{-i} x \rfloor b^i - \sum_{i=n+1}^{m+1} \lfloor b^{-i} x \rfloor b^i$$

$$= \lfloor b^{-n} x \rfloor b^n - \lfloor b^{-m-1} x \rfloor b^{m+1}$$ Nach (a) ist $\lfloor b^{-m-1} x \rfloor = 0$

und damit $$\sum_{i=n}^{m} a_i b^i = \lfloor b^{-n} x \rfloor b^n \le b^{-n} x b^n = x \quad \text{(b)}$$

4.2 $$x < b^n \left(\lfloor b^{-n} x \rfloor + 1 \right) \le \lfloor b^{-n} x \rfloor b^n + b^n$$

Einsetzen von (b) ergibt: $$x < \sum_{i=n}^{m} a_i b^i + b^n$$

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

Stellenwertdarstellung ganzer Zahlen

$a_m \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots$ | $m = \lfloor \log_b x \rfloor$ | $a_i = \lfloor b^{-i} x \rfloor - b \lfloor b^{-i-1} x \rfloor$

$$a_0 = \lfloor n \rfloor - b \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor = n \bmod b$$

$$a_1 = \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor - b \left\lfloor \frac{n}{b^2} \right\rfloor = (n \operatorname{div} b) \bmod b$$

usw.

Beispiel: n = 11

$$m = \lfloor \log_2 11 \rfloor = 3$$

$$a_0 = \lfloor 11 \rfloor - 2 \left\lfloor \frac{11}{2} \right\rfloor = 11 \bmod 2 = 1$$

$$a_1 = \lfloor 5 \rfloor - 2 \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 5 \bmod 2 = 1$$

$$a_2 = \lfloor 2 \rfloor - 2 \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor = 2 \bmod 2 = 0$$

$$a_3 = \lfloor 1 \rfloor - 2 \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 1 \bmod 2 = 1$$

$11_{10} = 1011_2$

Diskrete Mathematik für Informatiker © Hartmut Ring, 2010

Stellenwertdarstellung ganzer Zahlen

© Hartmut Ring, 2010 Diskrete Mathematik für Informatiker

Allgemein: $a_m \ldots a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots$

4 $\sum_{i=n}^{m} a_i b^i \le x < \sum_{i=n}^{m} a_i b^i + b^n$ korrekte Approximation

Für ganze Zahlen: Keine Nachkommastellen:
$a_m \ldots a_1 a_0$

$$\sum_{i=0}^{m} a_i b^i \le x < \sum_{i=0}^{m} a_i b^i + b^0 \quad \Rightarrow \quad x = \sum_{i=0}^{m} a_i b^i$$

Stellenwertdarstellung ganzer Zahlen

© Hartmut Ring, 2010 Diskrete Mathematik für Informatiker

$a_m \ldots a_1 a_0 \longrightarrow x = a_0 b^0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3 + \ldots + a_n b^m$

$= \boxed{a_0} + b\,\boxed{(a_1 b^0 + a_2 b^1 + a_3 b^2 + \ldots + a_m b^{m-1})}$

Letzte Ziffer → x mod b

x ohne letzte Ziffer → x div b

Praktisches Verfahren

Beispiel: Darstellung von 1357 zur Basis 8 (oktal):

1357	= 169 · 8 + **5**
169	= 21 · 8 + **1**
21	= 2 · 8 + **5**
2	= 0 · 8 + **2**

also: $1357_{10} = 2515_8$

Stellenwertdarstellung ganzer Zahlen

© Hartmut Ring, 2010
Diskrete Mathematik für Informatiker

Umrechnung von der Basis *b* zur Basis b^2

$$a_0b^0 + a_1b^1 \quad + \; a_2b^2 + a_3b^3 \quad + \ldots + \; a_{2n}b^{2n} + a_{2n+1}b^{2n+1}$$
$$= (a_0 + a_1b)b^0 \quad + (a_2 + a_3b)b^2 \quad + \ldots + (a_{2n} + a_{2n+1}b)b^{2n}$$
$$= (a_0 + a_1b)(b^2)^0 + (a_2 + a_3b)(b^2)^1 + \ldots + (a_{2n} + a_{2n+1}b)(b^2)^n$$

Dies ist die Stellenwertdarstellung zur Basis b^2 mit den Koeffizienten

$a_0' = (a_0 + a_1b)$
$a_1' = (a_2 + a_3b)$
...
$a_n' = (a_{2n} + a_{2n+1}b)$

Allgemein lässt sich so durch Gruppieren von Ziffern zwischen einer Basis *b* und einer Basis b^n umrechnen.

Beispiel: $1A2B_{16}$
$= 0001\ 1010\ 0010\ 1011_2$.
Die Lücken zeigen die Ziffergruppierung.