Mathematik für Wirtschaftsinformatiker

Edgar Kaufmann

WS 2009/2010

Inhaltsverzeichnis

Dieses Skriptum enthält den wesentlichen Inhalt der Vorlesung *Mathematik für Wirtschaftsinformatiker*, die im Wintersemester 2009/2010 an der Universität Siegen gehalten wurde. Dem vorliegenden Skriptum liegen, neben der unten aufgeführten Literatur, die folgenden Skripte zugrunde, aus denen Teile sinngemäß oder wortwörtlich übernommen wurden:

- Skriptum zum Vorkurs Mathematik im Wintersemester 2008/2009 von M. Sc. Ulf Cormann und Dipl.–Wirt.–Math. Petra Schupp

- Skriptum zur Vorlesung Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler im WS 2008/2009 (Master Economics) von Prof. Dr. Alfred Müller

Weitere Literatur:

1. Mosler, Dyckerhoff, Scheicher (2009): Mathematische Methoden für Ökonomen, Springer

2. Sydsaeter et al. (2004): Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Pearson

1 Grundlagen

Die folgenden Grundlagen aus der Schulmathematik werden als bekannt vorausgesetzt. Falls diese nicht geläufig sind, bitte diesen Schulstoff wiederholen!

1.1 Mengen

Eine **Menge** ist eine Gesamtheit von verschiedenen Objekten, genannt **Elemente**. Ein Objekt liegt in einer M.

Schreib- und Sprechweisen:

$x \in M$ x ist ein Element der Menge M, x liegt in der Menge M

$x \notin M$ x ist nicht Element der Menge M, x liegt nicht in der Menge M

$M = \{a, b, c\}$ M besteht aus den Elementen a, b, c (aufzählende Form)

$M = \{x | x \text{ ist eine positive ganze Zahl}\}$ (beschreibende Form)

$M = \emptyset = \{\}$ M ist die leere Menge

Besipiel: $A = \{2, 4, 6, \ldots 20\}$, $\{x | x \text{ positive ganze Zahl und } x^2 < 0\} = \emptyset$.

Bemerkung: Seien A und B Mengen.

(i) A heißt Teilmenge von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist, i.Z. $A \subset B$.

(ii) Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn jedes Element von A auch Element von B ist und umgekehrt.

Damit folgt sofort, dass die Reihenfolge der Elemente irrelevant ist. Es gilt z.B.:

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$$

und formal auch $\{1, 2, 3, 4/2\} = \{1, 2, 3\}$.

Mengenoperationen: Für zwei Mengen A und B definiert man

(i) die **Vereinigung** von A und B durch

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\},$$

(ii) den **Durchschnitt** von A und B durch

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\},$$

(iii) die **Differenz** von A und B

$$A \backslash B = \{x | x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$

1.2 Zahlbereiche

Definition 1.1. (i) Natürliche Zahlen:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

(ii) $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

(iii) Ganze Zahlen:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

(iv) Rationale Zahlen:

$$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$$

Das ist die Menge aller Brüche der Form p/q mit p, q ganze Zahlen ($q \neq 0$):

$$\frac{1}{2},\ -\frac{10}{11},\ -1.41 = -\frac{141}{100}$$

Die rechte Seite von

$$\frac{314}{100} = 3.14$$

heißt **endlicher Dezimalbruch**. Ein (periodischer) **unendlicher Dezimalbruch** ist z.B.

$$\frac{10}{7} = 1.42857\underbrace{142857}\underbrace{142857}\dots$$

(v) Reelle Zahlen:

$$\mathbb{R} = \{\text{alle Zahlen mit beliebigem Dezimalbruch}\}$$

Eine reelle Zahl ist genau dann rational, wenn der Dezimalbruch abbricht oder periodisch ist, andernfalls heißt sie irrational.

Also: Alle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ mit $x \notin \mathbb{Q}$ heißen irrational.

Beispiele für irrationale reelle Zahlen sind

$$\sqrt{2} = 1.4142..., \quad \pi = 3.1415..., \quad 0.10110111011110...$$

(vi) Komplexe Zahlen: $\mathbb{C}$

Offenbar gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Intervalle

Die Menge der reellen Zahlen zwischen a und b ($a < b$) heißt Intervall. Definiere

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\} & (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\} \\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\} & (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\} \\
(-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} | x < b\} & (-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\} \\
(a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} | x > a\} & [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}
\end{aligned}$$

Rechenregeln

Für beliebige reelle Zahlen a, b, c gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} &a+b=b+a && (a+b)+c=a+(b+c) \\ &a+0=a && a+(-a)=0 \\ &ab=ba && (ab)c=a(bc) \\ &1\cdot a=a && a/a=1,\ a\neq 0 \\ &(-a)b=a(-b)=-ab && (-a)(-b)=ab \\ &a(b+c)=ab+ac && (a+b)c=ac+bc \end{aligned}$$

Für Brüche gelten folgende Rechenregeln, falls die Nenner $\neq 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{a\cdot c}{b\cdot c}=\frac{a}{b} && \frac{-a}{-b}=\frac{a}{b} \\ &-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b} && \frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \\ &\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} && a+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c} \\ &\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} && \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc} \end{aligned}$$

Ungleichungen

Es gelten folgende Implikationen:

$$\begin{aligned} &a>0, b>0 \ \Rightarrow\ a+b>0 \text{ und } ab>0, \\ &a>b \ \Leftrightarrow\ a-b>0 \\ &a>b \ \Rightarrow\ a+c>b+c \\ &a>b \text{ und } b>c \ \Rightarrow\ a>c \\ &a>b \text{ und } c>0 \ \Rightarrow\ ac>bc \\ &a>b \text{ und } c<0 \ \Rightarrow\ ac<bc \\ &a>b \text{ und } c>d \ \Rightarrow\ a+c>b+d \end{aligned}$$

1.3 Potenz- und Zinseszinsrechnung

Ganzzahlige Potenzen

Wir schreiben

$$5^2=5\cdot 5, \quad 5^3=5\cdot 5\cdot 5, \ldots$$

Allgemein ist die n-te Potenz von a

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}.$$

Dabei heißt a **Basis** und n **Exponent**.
Ist $a = p/q$ ein Bruch, so gilt

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} \cdot \ldots \cdot \frac{p}{q} = \frac{p^n}{q^n}.$$

Beispiel: (Zinseszinsrechnung) Auf einem Konto mit einer jährlichen Verzinsung von 3 % wird ein Betrag von $K_0 = 1000$ € angelegt. Wieviel Kapital ist nach 5 Jahren auf dem Konto?

Der Zinssatz beträgt $i = 3\% = 0.03$. Nach einem Jahr beträgt das Kapital

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = K_0 \cdot (1+i) = K_0 \cdot 1.03.$$

Nach zwei Jahren beträgt das Kapital

$$K_2 = K_1 + K_1 \cdot i = K_1 \cdot (1+i) = K_0 \cdot (1+i)^2.$$

Nach n Jahren beträgt das Kapital

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n.$$

Also beträgt das Kapital nach 5 Jahren

$$K_5 = 1000 \cdot 1.03^5 = 1159.27.$$

Beispiel: (Abschreibung) Ein Auto mit einem Neuwert von $W_0 = 20000$ € verliert pro Jahr 15 % an Wert. Wie hoch ist der Wert nach 4 Jahren?

Der Wert W_n nach n Jahren beträgt

$$\begin{aligned} W_1 &= W_0 - W_0 \cdot 0.15 = W_0 \cdot 0.85, \\ W_2 &= W_1 \cdot 0.85 = W_0 \cdot 0.85^2, \\ &\vdots \\ W_n &= W_0 \cdot 0.85^n. \end{aligned}$$

Also nach 4 Jahren

$$W_4 = 20000 \cdot 0.85^4 = 10440.12.$$

(geometrisch-degressive Abschreibung)

Rechenregeln für Potenzen: Seien $a, b \neq 0$ reelle Zahlen und $r, s \in \mathbb{Z}$:
Dann gelten folgende Rechenregeln:

$$a^0 := 1 \qquad a^{-r} := \frac{1}{a^r}$$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (ab)^r = a^r b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

Beispiel: (Zinseszinsrechnung, negativer Exponent) Wieviel Geld hätten Sie vor 5 Jahren zu einem Zinssatz von 4 % anlegen müssen, um heute 1000 € zu haben?

Wir wissen

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n.$$

Hier gegeben $K_n = 1000$. Gesucht K_0?

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = K_n \cdot (1+i)^{-n} = 821.92.$$

Gebrochene Exponenten

Wie definiert man $a^{(p/q)}$ für Brüche, damit die eben genannten Rechenregeln weiterhin gelten? Für $a > 0$ kennen Sie die Definition der n-ten Wurzel $\sqrt[n]{a}$ als **positive** Lösung von

$$x^n = a.$$

Nach den Rechenregeln für Exponenten muss für $a^{1/n}$ gelten:

$$a = a^1 = a^{(\frac{1}{n} \cdot n)} = (a^{1/n})^n.$$

Also ist eine sinnvolle Definition

$$a^{1/n} := \sqrt[n]{a}.$$

Unter Verwendung der Rechenregeln für Exponenten ist also die allgemeine Definition für $a > 0$, p ganze Zahl und q eine natürliche Zahl

$$a^{p/q} = (a^{1/q})^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

Beispiel:

$$8^{5/3} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = 2^5 = 32.$$

Einfache jährliche Verzinsung

Beispiel: (Einfache Verzinsung)
Sie legen den Betrag von 1000 € zu einem Zins von 4 % an. Wieviel Geld haben Sie nach 5 Jahren, wenn Sie die Zinsen immer abheben und in den Sparstrumpf stecken?

Sie erhalten 5 Jahre lang immer $1000 \cdot 0.04 = 40$ € Zinsen. Nach 5 Jahren verfügen Sie also über

$$1000 + 5 \cdot 40 = 1200€.$$

Einfache jährliche Verzinsung bedeutet, dass Zinszahlungen nicht verzinst werden. Bei Anfangsguthaben K_0 und Zinssatz i lautet das Guthaben nach n Jahren:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot i).$$

Diskontierung: Soll zu einem Endkapital K_n das Anfangskapital K_0 bestimmt werden, so lautet die Formel:

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + n \cdot i}.$$

Einfache unterjährige Verzinsung

In Deutschland wird die Zinsperiode von 1 Jahr in der Regel in 12 Monate mit 30 Tagen eingeteilt, also in 360 Tageseinheiten (so genannte 30/360-Methode). Die Zinszahlung z für t Zinstage ($0 \leq t \leq 360$) beträgt dann

$$z = \frac{t}{360} \cdot K_0 \cdot i.$$

Das Endkapital nach t Tagen beträgt

$$K_t = K_0 + z = K_0 + \frac{t}{360} \cdot K_0 \cdot i = K_0 \cdot \left(1 + \frac{t}{360} \cdot i\right)$$

Wir haben schon gesehen, dass sich bei n Jahren Zinszahlung mit Zinseszins für den Endwert nach n Jahren ergibt:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$$

und für den Barwert K_0 bei gegebenem Endwert K_n gilt

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + i)^n} = K_n \cdot (1 + i)^{-n}.$$

Beispiel: (Berechnung des Zinssatzes i)
Ihre Bank verspricht Ihnen, bei Anlage von 1000 € in 15 Jahren den doppelten Betrag von 2000 € zurückzuzahlen. Wie hoch ist der Zinssatz?

Es gilt also $2 \cdot K_0 = K_{15} = K_0 \cdot (1 + i)^{15}$.
Division durch $K_0 \neq 0$ liefert $2 = (1 + i)^{15}$. Ziehen der 15-ten Wurzel liefert

$$1 + i = 2^{1/15} = 1.04729.$$

Also ist der Zinssatz $i = 1.04729 - 1 = 4.729$ %.

2 Etwas mathematische Logik

Logik beschäftigt sich mit den Methoden des Denkens, d.h. mit der Aufstellung und Überprüfung logischer Gesetze und Regeln für das Bilden von Begriffen, Aussagen und Schlüssen.

2.1 Aussagenlogik

Bezeichung 2.1. Eine **Aussage** ist ein sprachliches Gebilde, das vom Inhalt her wahr oder falsch ist, d.h. man kann jeder Aussage einen Wahrheitswert zuordnen.

Keine Aussagen sind:

- Guten Morgen!
- Walzer ist der schönste Tanz.
- Dieser Satz ist falsch.

Es ist nicht immer bekannt, ob eine Aussage wahr oder falsch ist, es gibt jedoch keine Aussage, die weder wahr noch falsch ist und keine, die beides zugleich ist.

Bezeichung 2.2. Eine **elementare Aussage** ist eine Aussage, die keine weitere Aussage als Teil enthält und die nicht Negation einer Aussage ist.

Beispiel 2.3.

- Die Erde ist ein Planet. (w)
- 5 ist eine Primzahl. (w)
- 7 ist eine gerade Zahl. (f)

Bezeichung 2.4. Eine **nicht elementare Aussage** ist eine Aussage, die aus zwei oder mehreren elementaren Aussagen zusammengesetzt ist oder die durch Verneinung einer Aussage entsteht.

Beispiel 2.5.

- Es gilt nicht, das Steine auf der Erde nach oben fallen. (w)
- Rubens war weder Maler noch Architekt. (f)

Bezeichung 2.6. Eine **Aussageform** ist ein sprachliches Gebilde, das mindestens eine freie Variable enthält und in eine Aussage übergeht, sobald ein Element der jeweiligen Grundmenge für jede freie Variable eingesetzt wird. Aussageformen, die ausschließlich Aussagevariablen enthalten, nennt man **aussagenlogische Aussageformen**.

Beispiel 2.7.

- $x^2 = 1$.
  Ist $\mathbb{R}$ die Grundmenge, dann ist die Aussage wahr für $x = 1$ oder $x = -1$, für jede andere reelle Zahl x ist sie falsch.

- Entweder p oder q ist eine wahre Aussage.
  Es handelt sich um eine aussagenlogische Aussageform, da p und q sinnvollerweise nur als Aussagevariablen zu verstehen sind. Die Aussageform nimmt genau dann den Wert wahr an, wenn genau eine der beiden Variablen durch eine wahre Aussage (bzw. den Wahrheitswert w) und die andere durch eine falsche Aussage (bzw. den Wahrheitswert f) ersetzt wird.

Definition 2.8. Eine aussagenlogische Aussageform, die bei jeder Belegung ihrer Variablen den Wert wahr annimmt, heißt **Wahrform** (oder auch **Tautologie**, logisch wahre Aussageform, logisches Gesetz).
Wird bei jeder Belegung ihrer Variablen der Wert falsch angenommen, so heißt eine aussagenlogische Aussageform **Falschform** (oder auch Kontradiktion, logisch falsche Aussageform, logischer Widerspruch).
Alle übrigen aussagenlogischen Aussageformen nennt man **Neutralform**.

Beispiel 2.9.

1. „Es gilt entweder p oder nicht p.“ ist eine Tautologie.
2. „Es gilt p und nicht p.“ ist ein Widerspruch.
3. „Es gilt p oder q.“ ist eine Neutralform.

Definition 2.10. Eine Abbildung, die einer oder mehreren Aussagen bzw. Aussageformen eine neue Aussage bzw. Aussageform zuordnet, nennt man **Junktion**. Für bestimmte gebräuchliche Junktionen gibt es allgemein übliche Symbole, sog. **Junktoren**:

Bezeichnung	Schreibweise	Sprechweise
Negation	$\neg p$	nicht p
Konjunktion	$p \wedge q$	p und q
Disjunktion	$p \vee q$	p oder q (einschließendes oder)
Subjunktion	$(p \to q);\ \neg p \vee q$	aus p subjungiert q
Bijunktion	$(p \to q) \wedge (q \to p);\ (p \leftrightarrow q)$	p bijungiert q
Antivalenz	$\neg(p \leftrightarrow q);\ (p \longleftrightarrow q)$	entweder p oder q (ausschließendes oder)

Beispiel 2.11. (Der zugehörige Wahrheitswert ist nicht angegeben.)

- p: Die Rose ist rot.

  $\neg p$: Die Rose ist nicht rot.

- p: 18 ist durch 2 teilbar. q: 18 ist durch 3 teilbar.

  $p \wedge q$: 18 ist durch 2 und durch 3 teilbar.

- p: Das Kind ißt Bonbons. q: Das Kind ißt Schokolade.

  $p \vee q$: Das Kind ißt Schokolade oder Bonbons oder beides.

- p: x ist durch 10 teilbar. q: x ist durch 5 teilbar.

  $p \to q$: Wenn x durch 10 teilbar ist, so ist x auch durch 5 teilbar.

- p: Eine Zahl ist durch 6 teilbar. q: Eine Zahl ist durch 2 teilbar.

  $p \leftrightarrow q$: Eine Zahl ist dann und nur dann durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 teilbar ist.

- p: Peter ist in Köln geboren. q: Peter ist in Bonn geboren.

  $p \leftarrow\!\!\!+\!\!\!\rightarrow q$: Peter ist entweder in Köln oder in Bonn geboren.

In der Logik interessiert man sich nicht (so sehr) dafür, was eine Junktion bei konkreten Aussagen bewirkt, sondern man betrachtet die Bedeutung einer Junktion als ausreichend beschrieben, wenn man weiß, wie sich der Wahrheitswert der zugeordneten Aussage in Abhängigkeit von dem der ursprünglichen Aussagen verhält. Dazu dienen die sog. Wahrheitsfunktionen.

Definition 2.12. Die Zuordnung von Wahrheitswerten einer Aussagenverknüpfung zu den Wahrheitswerten der in ihr enthaltenen Elementaraussagen bezeichnet man als **Wahrheitsfunktion.**

Wahrheitsfunktionen können mit Hilfe von Wahrheitswertetabellen beschrieben werden:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$	$p \leftarrow\!\!\!+\!\!\!\rightarrow q$
w	w	f	w	w	w	w	f
w	f	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	f	w
f	f	w	f	f	w	w	f

Mit Hilfe dieser Symbole und Funktionen kann man Sachverhalte, die in der Umgangssprache nur sehr umständlich zu beschreiben wären, sehr einfach ausdrücken. Außerdem lassen sich mit Hilfe von eindeutig definierten Symbolen Mißverständnisse vermeiden.

Beispiel 2.13.

- p: Es schneit., q: Es ist kalt.

  a) Es schneit, es ist kalt. $p \wedge q$
  b) Es schneit, aber es ist nicht kalt. $p \wedge (\neg q)$
  c) Wenn es schneit, ist es kalt. $p \to q$
  d) Weder schneit es, noch ist es kalt. $(\neg p) \wedge (\neg q)$
  e) Es stimmt nicht, daß es schneit oder es kalt ist. $\neg(p \vee q)$

- p: Paul ist reich., q: Paul ist glücklich.

  a) $p \wedge (\neg q)$ Paul ist reich, aber nicht glücklich.
  b) $(\neg p) \vee q$ Paul ist nicht reich oder glücklich.
  c) $(\neg p) \wedge (\neg q)$ Weder ist Paul reich noch glücklich.
  d) $p \to q$ Wenn Paul reich ist, ist er glücklich.
  e) $p \leftarrow\!\!\!+\!\!\!\rightarrow q$ Entweder ist Paul reich oder glücklich.

Definition 2.14. Seien A und B Aussageformen:

- A impliziert B $(A \Rightarrow B)$, wenn $A \to B$ eine Tautologie ist. (Sprechweisen: wenn A, dann B; B folgt logisch aus A; A ist hinreichende Bedingung für B; B ist notwendige Bedingung für A). Man spricht von **logischer Implikation**.
- A ist äquivalent zu B $(A \Leftrightarrow B)$, wenn $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie ist. (Sprechweisen: A genau dann, wenn B; A dann und nur dann, wenn B). Man spricht von **logischer Äquivalenz**.

Beachte: Die Pfeile $\Leftrightarrow, \Rightarrow$ bezeichnen eine Beziehung zwischen Wahrheitsfunktionen, die Pfeile $\leftrightarrow, \to$ verbinden Aussagen bzw. Aussageformen zu neuen Aussagen bzw. Aussageformen. $p \to q$ meint also die Aussageform „Aus p folgt q." während $p \Rightarrow q$ die Tatsache bezeichnet, daß q aus p logisch folgt, also $p \to q$ eine Tautologie ist.

2.2 Gesetze der Aussagenlogik

- Kommutativgesetze

  $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

  $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
- Assoziativgesetze

  $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

  $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
- Distributivgesetze

  $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

  $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- Idempotenzgesetze

  $p \vee p \Leftrightarrow p$

  $p \wedge p \Leftrightarrow p$
- Absorptionsgesetze

  $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

  $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
- de Morgan Gesetze

  $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$

  $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$
- Andere Verneinungsgesetze (W Wahrform, F Falschform)

  $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

  $\neg W \Leftrightarrow F$

  $\neg F \Leftrightarrow W$

- Satz vom ausgeschlossenen Dritten
  $p \vee (\neg p)$ ist eine Tautologie.
- Satz vom Widerspruch
  $p \wedge (\neg p)$ ist eine Kontradiktion.
- Kontrapositionsgesetz
  $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q) \to \neg p$
- Transitivgesetz
  $((p \to q) \wedge (q \to r)) \Rightarrow (p \to r)$
- Abtrenngesetze
  $p \wedge (p \to q) \Rightarrow q$ (direkter Schluß)
  $(p \to q) \wedge (\neg q) \Rightarrow \neg q$ (indirekter Schluß)

Bewiesen werden diese Gesetze durch Aufstellen der zugehörigen Wahrheitswertetabelle.

2.3 Existenz- und Universalaussagen

Existenz- und Universalaussagen beziehen sich auf Aussageformen. Sei $A(x)$ eine Aussageform mit einer Variablen x und G eine Menge zulässiger Objekte. Dann bezeichnet $\{x \in G : A(x)\}$ die Menge aller Objekte der Grundmenge G, für die $A(x)$ wahr. Man sagt auch *für die die Eigenschaft* $A(x)$ *erfüllt ist*. Man verwendet folgende Bezeichnungen.

Definition 2.15. Sei $A(x)$ eine Aussageform mit Grundmenge G.

(i) Falls $\{x \in G : A(x)\} \neq \emptyset$, dann schreibt man

$$\exists\, x \in G :\; A(x)$$

Sprechweise: Es existiert ein $x \in G$ mit der Eigenschaft $A(x)$.
Das Zeichen $\exists$ heißt **Existenzquantor**.

(ii) Falls $\{x \in G : A(x)\} = G$, dann schreibt man

$$\forall\, x \in G :\; A(x)$$

Sprechweise: Für alle (oder jedes) $x \in G$ gilt $A(x)$.
Das Zeichen $\forall$ heißt **Allquantor**.

Beispiel 2.16. Sei $G = \mathbb{R}$. Betrachte die Aussageformen

$A(x)$: x löst die Gleichung $x^2 = 4$,

$B(x)$: $x \leq e^x$.

Wegen $2^2 = (-2)^2 = 4$ gilt: $\exists\, x \in \mathbb{R}:\ A(x)$
Wir zeigen später, dass $x \leq e^x$ für alle reellen Zahlen gilt, d.h. $\forall\, x \in \mathbb{R}:\ B(x)$.

Somit sind sogenannte **Existenzaussagen** bzw. **Universalaussagen** aus den Aussageformen entstanden. Die vorkommende Variable ist nicht mehr frei, sondern durch den entsprechenden Quantor gebunden. (Man darf nicht mehr jedes beliebige Element der Grundmenge einsetzen bzw. man muss jedes Element einsetzen können.)
Beliebige Kombinationen sind möglich, z.B.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, n \in \mathbb{N}:\ n > x.$$

Verneinung von Existenz- und Universalaussagen

Oftmals sind in der Mathematik Verneinungen von Existenz- und Universalaussagen zu bilden. Dabei ist folgende Regel ist zu beachten:

1. Verneinung einer Existenzaussage

$$\neg(\exists\, x \in G:\ A(x)) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, x \in G:\ \neg A(x)$$

2. Verneinung einer Universalaussage

$$\neg(\forall\, x \in G:\ A(x)) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, x \in G:\ \neg A(x)$$

Beispiel 2.17 (Verneinte Existenzaussage)**.**

$$\begin{aligned}
&\neg(\exists\, n \in \mathbb{N}:\ n \geq 7\ \wedge\ n \leq 10)\\
&\ \Leftrightarrow\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}:\ \neg(n \geq 7\ \wedge\ n \leq 10)\\
&\ \Leftrightarrow\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}:\ \neg(n \geq 7) \vee \neg(n \leq 10)\\
&\ \Leftrightarrow\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}:\ n < 7\ \vee\ n > 10
\end{aligned}$$

Beispiel 2.18 (Verneinte Universalaussage)**.**

$$\begin{aligned}
&\neg(\forall\, n \in \mathbb{N}:\ (n \text{ ist eine Primzahl } \rightarrow n \text{ ist ungerade}))\\
&\ \Leftrightarrow\ \ \exists\, n \in \mathbb{N}:\ \neg(n \text{ ist eine Primzahl } \rightarrow n \text{ ist ungerade}))\\
&\ \Leftrightarrow\ \ \exists\, n \in \mathbb{N}:\ \neg(\neg\ (n \text{ ist eine Primzahl})\ \vee\ n \text{ ist ungerade})\\
&\ \Leftrightarrow\ \ \exists\ n \in \mathbb{N}:\ n \text{ ist Primzahl } \wedge\ n \text{ ist gerade}
\end{aligned}$$

Bei Aussagen, die mehrere Quantoren enthalten, wird aus $\forall$ jeweils $\exists$ und umgekehrt und die zugehörige Aussageform ist zu verneinen. Die Eigenschaften der Variablen unter den Quantoren sind beizubehalten.

Beispiel 2.19.

$$\neg(\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, n \in \mathbb{N}:\ n > x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, x \in \mathbb{R}\ \forall\, n \in \mathbb{N}:\ n \leq x$$

2.4 Notwendige und hinreichende Bedingung

Für $A \Rightarrow B$ gibt es, wie schon erwähnt, die Formulierungen:

1. A ist hinreichend für B.
2. B ist notwendig für A.

1. besagt, daß die Erfüllung der Aussage A ausreichend für die Erfüllung der Aussage B ist.
2. besagt, daß die Gültigkeit der Aussage B erforderlich ist, damit die Aussage A gilt. Gilt B nicht, so gilt auch A nicht.

Beispiel 2.20.

A: Die Zahl n ist teilbar durch 6.

B: Die Zahl n ist teilbar durch 3.

Dann gilt: $A \Rightarrow B$.
Hinreichend dafür, daß n durch 3 teilbar ist, ist das n durch 6 teilbar ist. Notwendig dafür, daß eine Zahl durch 6 teilbar ist, ist ihre Teilbarkeit durch 3.

Die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ (gleichbedeutend mit $A \Rightarrow B$ **und** $B \Rightarrow A$) gilt in diesem Beispiel nicht. Z.B. ist 9 durch 3 teilbar, jedoch nicht durch 6.

3 Folgen, Summen, Produkte, Grenzwerte

3.1 Folgen

Definition 3.1 (Folge)**.** Eine Auflistung von Zahlen $a_1, a_2, a_3, ...$ oder $a_0, a_1, a_2, ...$ heißt Zahlenfolge. Für eine Folge schreibt man auch kurz (a_n).

Bemerkung 3.2. Es gibt endliche Folgen, z.B. 1,6,23,8 und unendliche Folgen.

Beispiel 3.3 (Unendliche Folgen)**.**

(i) $1, 2, 3, 4, \ldots,\ a_n = n$, natürliche Zahlen.

(ii) a_0, d, $a_n = a_0 + n \cdot d$, $n \in \mathbb{N}$, **arithmetische Folge**. Es gilt $a_{n+1} - a_n = d$.

(iii) $(-1, 1, -1, 1, -1, \ldots, a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$

(iv) $1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots,\ a_n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

(v) $a_0, q \in \mathbb{R}$, $a_n = a \cdot q^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, **geometrische Folge**.
Es gilt $a_{n+1}/a_n = q$, falls $a \neq 0\ q \neq 0$.

(vi) $b, c \in \mathbb{R}$, $a_1 = 2$, $a_n = c \cdot a_{n-1} + b$, rekursiv definierte Folge.

3.2 Summen

Seien $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$, und $k, l \in \mathbb{Z}$.
Wir verwenden im Folgenden das "Summen-Symbol"

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = \begin{cases} a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n, & k < n \\ a_k, & k = n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

Beispiel 3.4. Sei $a_1, ..., a_5$ die Folge der Zahlen von 1 bis 5 (also $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 5$). Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{5} a_i &= a_1 + a_3 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \\ \sum_{i=2}^{3} a_i &= a_2 + a_3 = 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

Bemerkung 3.5. Im Fall der beiden Summen aus dem vorherigen Beispiel können die Summanden auch "direkt" angegeben werden. Man schreibt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{5} i &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \\ \sum_{i=2}^{3} i &= 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

Ebenso:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{4} 2^i &= 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \\ \sum_{i=3}^{5} (x+i)^{2\cdot i} &= (x+3)^{2\cdot 3} + (x+4)^{2\cdot 4} + (x+5)^{2\cdot 5}\end{aligned}$$

Rechenregeln für Summen

Satz 3.6. *Seien (a_i) und (b_i) Folgen und c eine reelle Zahl. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) &= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i, \\ \sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i &= c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i.\end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

bzw. allgemeiner für $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=k}^{n+k} a_{i-k} \qquad \text{“Indexshift”}$$

sowie für $k < l < n$:

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{i=k}^{l} a_i + \sum_{i=l+1}^{n} a_i.$$

BEWEIS. Klar. □

Formeln für wichtige Summen

Satz 3.7. *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned}2\cdot\sum_{i=1}^{n} i &= \sum_{i=1}^{n} i+\sum_{i=1}^{n} i\\ &= \begin{array}{cccccccccccc} & 1 & + & 2 & + & 3 & + & ... & + & n-1 & + & n\\ + & n & + & n-1 & + & n-2 & + & ... & + & 2 & + & 1\end{array}\\ &= n(n+1),\end{aligned}$$

also $2\cdot\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)$. Hieraus folgt die Behauptung. □

Satz 3.8. *Für $n\in\mathbb{N}_0$ und $q\in\mathbb{R}$, $q\neq 1$ gilt:*

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned}(q-1)\sum_{i=0}^{n} q^i &= \sum_{i=0}^{n}(q-1)q^i\\ &= \sum_{i=0}^{n}(q^{i+1}-q^i) \text{ Teleskopsumme}\\ &= q^{n+1}-q^0 = q^{n+1}-1,\end{aligned}$$

also

$$(q-1)\sum_{i=0}^{n} q^i = q^{n+1}-1.$$

Teilen durch $(q-1)$ liefert die Behauptung. □

Beispiel 3.9 (Einfache Verzinsung)**.** Am 15.03. überweist Ihnen Ihre Oma den Betrag $B = 500$ € . Wie hoch ist der Zinsertrag, wenn Sie diesen zu einem Zins von 4 % bis zum Jahresende anlegen?
Der Betrag wird wird $15+9\cdot 30$ Tage verzinst. Also gilt

$$Z = \frac{15+9\cdot 30}{360}\cdot B\cdot i = \frac{285}{360}\cdot 500\cdot 0.04 \approx 15.83.$$

Sie erhalten weitere Zahlungen jeweils am 15. der Folgemonate. Wie hoch ist der gesamte Zinsertrag, wenn Sie alle Zahlungen zu einem Zins von 4 % bis zum Jahresende anlegen? Die Summe der Zinserträge beträgt:

$$\begin{aligned}&\frac{15+9\cdot 30}{360}\cdot B\cdot i+\cdots+\frac{15+0\cdot 30}{360}\cdot B\cdot i\\ =&\sum_{j=0}^{9}\frac{15+j\cdot 30}{360}\cdot B\cdot i = \frac{B\cdot i}{360}\sum_{j=0}^{9}\Big(15+30j\Big)\\ =&\frac{B\cdot i}{360}\Big(15\cdot 10+30\sum_{j=0}^{9} j\Big) = \frac{500\cdot 0.04}{360}\Big(150+30\cdot\frac{9\cdot 10}{2}\Big) = 83.33\end{aligned}$$

Man beachte, dass die Zinserträge der monatlichen Zahlungen eine arithmetische Folge bilden. (Welche?)

Beispiel 3.10 (Zinseszins bei jährllicher Einzahlung)**.** Sie zahlen 10 Jahre lang jährlich zum Jahresanfang 1000 € auf ein Konto mit Zinssatz von 4 % (also 10 Zahlungen). Über wieviel Kapital können Sie am Ende des 10. Jahres verfügen?
Wir erhalten inklusive Zinseszins folgende Beträge:

aus Jahr 1: 10 Jahre Verzinsung	$a_{10} = 1000 \cdot 1.04^{10}$
aus Jahr 2: 9 Jahre Verzinsung	$a_9 = 1000 \cdot 1.04^9$
$\vdots$	
aus Jahr 10: 1 Jahr Verzinsung	$a_1 = 1000 \cdot 1.04^1 (= 1040)$

Ihr Gesamtkapital beträgt also

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} 1000 \cdot 1.04^k = 1000 \cdot \sum_{k=1}^{10} 1.04^k &= 1000 \cdot \Big(\sum_{k=0}^{10} 1.04^k - 1 \Big) \\ &= 1000 \cdot \frac{1.04^{11} - 1}{1.04 - 1} - 1000 \\ &= 12486.35\end{aligned}$$

3.3 Produkte

Analog wird für Produkte das “Produkt–Symbol” verwendet:

$$\prod_{i=k}^{l} a_i := \begin{cases} a_k \cdot a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_l, & k < l \\ a_k, & k = l \\ 1, & k > l \end{cases} .$$

3.4 Grenzwerte von Folgen

Die Folgenglieder $a_n = 2^{-n}$ der Folge $1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$ werden offenbar immer kleiner. Mit wachsendem Index n nähern sich die Folgenglieder immer mehr der Zahl 0. Wir sagen, die Folge konvergiert gegen den Grenzwert Null.
Um den Begriff des Grenzwertes einer Folge einzuführen benötigt man zunächst den **Betrag einer reellen Zahl**.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Eine Folge (a_n) konvergiert gegen eine reelle Zahl a wenn $|a_n - a|$ für große Indizes n unter jede beliebige Schranke fällt. Formal kann dies wie folgt ausgedrückt werden:

Definition 3.11. Die Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **Grenzwert** der Folge (a_n), falls es für jede Zahl $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl N_ϵ gibt, so dass für alle $n \geq N_\epsilon$ gilt $|a_n - a| < \epsilon$.

Wir schreiben dann

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

oder

$$a_n \to a \text{ für } n \to \infty.$$

Obige Definition kann auch wie folgt gelesen werden: Für jede Zahl $\epsilon > 0$ gibt es nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| > \epsilon$.

Beispiel 3.12. (i) Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ hat den Grenzwert 0, da $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right|$ für große n schließlich unter jede Schranke fällt. Formal kann dies wie folgt gezeigt werden: Sei $\epsilon > 0$, wähle N_ϵ als die kleinste natürliche Zahl, die größer als $\frac{1}{\epsilon}$ ist. Dann gilt $\frac{1}{N_\epsilon} < \epsilon$ und somit für $n \geq N_\epsilon$ $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\epsilon} < \epsilon$ also $|a_n - 0| < \epsilon$ für alle $n \geq N_\epsilon$.

(ii) Die Folge $a_n = \frac{2n}{n+1}$ hat den Grenzwert 2. Es gilt

$$|a_n - 2| = \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2n}{n+1} - \frac{2n+2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{n} < \varepsilon$$

für alle $n > \frac{2}{\varepsilon}$.

(iii) Die Folge $-1, 1, -1, 1, -1, ...$ hat keinen Grenzwert.

Eine Folge mit Grenzwert heißt **konvergent**, eine Folge ohne Grenzwert heißt **divergent**.

Definition 3.13. Eine Folge (a_n) heißt **bestimmt divergent** gegen ∞, falls es für jede reelle Zahl M ein $N_M \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N_M$ gilt: $a_n > M$.
Man sagt auch, dass die Folge gegen unendlich geht und schreibt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{bzw.} \qquad a_n \to \infty \text{ für } n \to \infty.$$

Analog heißt eine Folge (a_n) **bestimmt divergent** gegen $-\infty$, falls es für jede reelle Zahl m ein $N_m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N_m$ gilt: $a_n < m$. In diesem Fall sagt man auch, dass die Folge gegen minus unendlich geht und schreibt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad \text{bzw.} \qquad a_n \to -\infty \text{ für } n \to \infty$$

Bestimmte Divergenz gegen ∞ bedeutet, dass es für jede positive Zahl M nur endlich viele n gibt, so dass $a_n < M$. Die Folgenglieder steigen über jede Schranke.

Beispiel 3.14. (i) Die Folge $a_n = \sqrt{n}$ ist bestimmt divergent gegen ∞, denn für jede Zahl $M \in \mathbb{R}$ ist $\sqrt{n} > M$ für alle $n > M^2$.

(ii) Die Folge $a_n = 2n - n^2 = n(2-n)$ ist bestimmt divergent gegen $-\infty$.

(iii) Für die geometrische Folge $a_n = q^n$ sind folgende Fälle zu unterscheiden.

Falls $|q| < 1$, dann $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.
Falls $q = 1$, dann $\lim_{n\to\infty} q^n = 1$.
Falls $q > 1$, dann $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$ (bestimmt divergent).
Falls $q \leq -1$, dann ist die Folge divergent.

Rechenregeln für Grenzwerte

Es ist mühsam, komplizierte Folgen mittels der Definition auf Konvergenz zu überprüfen. Mit den folgenden Rechenregeln vereinfacht sich der Nachweis häufig.

Satz 3.15. *Seien* (a_n) *und* (b_n) *konvergente Folgen mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Dann gilt*

(i)
$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$$

(ii)
$$\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$$

(iii)
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$$

(iv) Falls $b \neq 0$, *dann*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

Beispiel 3.16. (i)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2} - \frac{4}{2+1/n} + 2 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 0$$

(ii)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^2 - 3 - 4n}{3n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{8 - 3/n^2 - 4/n}{3(1+1/n)} = \frac{8}{3}$$

Achtung: Satz 3.15 gilt nicht für bestimmt divergente Folgen.

3.5 Reihen

Sei (a_n) eine Folge. Wie konstruieren eine neue Folge (s_n) durch

$$s_n := a_1 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Definition 3.17. s_n heißt n**-te Partialsumme** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Folge (s_n) heißt **(unendliche) Reihe** und wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet.
Ist die Folge (s_n) konvergent mit $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, dann schreibt man für den Grenzwert auch

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Bemerkung 3.18. Eine wichtige Reihe haben wir schon kennengelernt, nämlich die **geometrische Reihe**, die aus der geometrischen Folge gebildet wird. Nach Satz 3.8 gilt für $n \in \mathbb{N}_0$ und $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Falls $-1 < q < 1$, dann konvergiert die geometrische Reihe. Aus den Rechenregeln für Grenzwerte erhält man mit $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{\lim_{n\to\infty} q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{-1}{q - 1}$$

und damit

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}.$$

Für $|q| \geq 1$ divergiert die Reihe.

Beispiel 3.19. Sie gründen eine Stiftung, die ab sofort jährlich einen Betrag B für wohltätige Zwecke verwenden soll. Mit welchem Grundkapital muss die Stiftung bei einem Zinssatz von $i = 4\%$ ausgestattet werden, damit der Betrag B jährlich zur Verfügung steht?
Wir überlegen zunächst, welches Kapital für eine einzelne Zahlung zur Verfügung gestellt werden muss.

- Für die sofortige Zahlung $a_0 = B$.
- Für die 2. Zahlung muss gelten $a_1 \cdot 1.04 = B$, also $a_1 = B \cdot 1.04^{-1}$.
- Für die 3. Zahlung entsprechend $a_2 \cdot 1.04^2 = B$, also $a_2 = B \cdot 1.04^{-2}$.

  $\vdots$

- Für die n+1. Zahlung entsprechend $a_n \cdot 1.04^n = B$, also $a_n = B \cdot 1.04^{-n}$.

Insgesamt ergibt dies

$$K = \sum_{k=0}^{\infty} B \cdot 1.04^{-k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} B \cdot 1.04^{-k} = B \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} 1.04^{-k}$$

Mit $q = 1.04^{-1}$ folgt aus Bemerkung 3.18

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} 1.04^{-k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (1.04^{-1})^k = \frac{1}{1 - 1.04^{-1}} = 26.$$

Das benötigte Gesamtkapital beträgt demnach $K = 26 \cdot B$.

4 Funktionen

4.1 Grundbegriffe

Definition 4.1. Seien A und B nichtleere Mengen. Eine Zuordnung, bei der jedem Element $x \in A$ genau ein Element $y \in B$ zugeordnet wird, heißt **Funktion** oder **Abbildung**. Bezeichnet man die Abbildung mit f, so schreibt man

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

A wird **Definitionsbereich** und B wird **Zielmenge** genannt. x bezeichnet die **Variable** und $f(x)$ den **Funktionswert**. Der **Wertebereich** oder das **Bild von** A **unter** f (kurz: das Bild von f) ist definiert als

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \subset B.$$

Andere Schreibweisen: $f : A \to B, f(x) = x^2; \quad f : A \ni x \mapsto f(x) \in B.$

Bemerkung 4.2. Zwei Abbildungen sind genau dann gleich, wenn sie in Definitions- und Zielmenge sowie der Zuordnungsvorschrift übereinstimmen.

Beispiel 4.3.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$. Für das Bild von f gilt:

$$f(\mathbb{R}) = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$.

(iii) $h : \{0, 1, 2, 3\} \to \{0, 1\} \times \{0, 1\}$
$h(0) = (0, 0),\ h(1) = (0, 1),\ h(2) = (1, 0),\ h(3) = (1, 1).$

(iv) Eine Folge (a_n) reeller Zahlen definiert eine Funktion

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n,$$

also $f(n) = a_n$.

Definition 4.4. Zu einer Funktion $f : A \to B$ wird die Menge

$$G_f := \{(x, f(x)) :\ x \in A\}$$

Graph von f genannt.

Bemerkung 4.5. Für Funktionen $f : A \to B$ und $g : A \to B$ schreiben wir kurz $f, g : A \to B$. Reellwertige Funktionen $f, g : A \to \mathbb{R}$ kann man addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren. Man erhält neue Funktionen

$$\begin{aligned} f \pm g : A \to \mathbb{R}, &\quad x \mapsto f(x) \pm g(x), \\ f \cdot g : A \to \mathbb{R}, &\quad x \mapsto f(x) \cdot g(x), \\ f/g : A \to \mathbb{R}, &\quad x \mapsto f(x)/g(x), \end{aligned}$$

wobei f/g nur dann gebildet werden darf, wenn $g(x) \neq 0$ für alle $x \in A$. Analog definiert man

$$\min\{f,g\} : A \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \min\{f(x), g(x)\},$$
$$\max\{f,g\} : A \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}.$$

Beispiel 4.6. Das Maximum der Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = -x$ ist die Betragsfunktion

$$x \mapsto |x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Beispiel 4.7 (Polynom n-ten Grades)**.** Eine Funktion der Form $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R},$$

mit Koeffizienten $a_0, \ldots a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, heißt Polynom n-ten Grades.

4.2 Eigenschaften von Funktionen

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ und $f : A \to B$ eine Funktion.

Symmetrie

Definition 4.8.

- f heißt **gerade** oder **symmetrisch**, wenn für alle $x \in A$ mit $-x \in A$ gilt: $f(x) = f(-x)$.
- f heißt **ungerade** oder **antisymmetrisch**, wenn für alle $x \in A$ mit $-x \in A$ gilt: $f(x) = -f(-x)$.

Beispiel 4.9. $f(x) = x^2$ ist eine gerade Funktion. $f(x) = x^3$ ist eine ungerade Funktion.

Monotonie

Definition 4.10. f heißt

- **monoton wachsend**, wenn aus $x_1 < x_2$ immer $f(x_1) \leq f(x_2)$ folgt,
- **streng monoton wachsend**, wenn aus $x_1 < x_2$ immer $f(x_1) < f(x_2)$ folgt,
- **monoton fallend**, wenn aus $x_1 < x_2$ immer $f(x_1) \geq f(x_2)$ folgt,
- **streng monoton fallend**, wenn aus $x_1 < x_2$ immer $f(x_1) > f(x_2)$ folgt.

Beispiel 4.11. Eine lineare Funktion $f(x) = ax + b$ ist streng monoton steigend, falls $a > 0$, und streng monoton fallend, falls $a < 0$. Die konstante Funktion $f(x) = b$ ist sowohl monoton steigend als auch monoton fallend.

Beispiel 4.12. $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ ist nicht monoton auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Erst die Einschränkung des Definitionsbereichs auf $(-\infty, 0)$ oder $(0, \infty)$ liefert eine streng monoton fallende Funktion.

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Definition 4.13. $f : A \to B$ heißt

- **surjektiv**, wenn $f(A) = B$ gilt, d.h. für alle $y \in B$ existiert ein $x \in A$ mit $f(x)0y$
- **injektiv**, wenn für beliebige $x_1 \neq x_2$, $x_1,\ x_2 \in M$ folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- **bijektiv**, falls f sowohl surjektiv als auch injektiv ist.

Bemerkung 4.14. f ist genau dann injektiv, wenn gilt

$$\forall\, x_1,\ x_2 \in M:\ f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ x_1 = x_2$$

Beispiel 4.15. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist nicht injektiv, da $f(-1) = 1 = f(1)$, und nicht surjektiv, da $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$.

Beispiel 4.16. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 + 1$ ist injektiv, denn für alle $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ x_1^3 + 1 \neq x_2^3 + 1 \ \Rightarrow\ g(x_1) \neq g(x_2)$$

g ist auch surjektiv. Sei $y \in \mathbb{R}$ und $x := (y-1)^{1/3}$. Dann ist $x \in \mathbb{R}$ und es gilt

$$g(x) = g((y-1)^{1/3}) = y.$$

Somit ist g auch bijektiv.

Bemerkung 4.17. Ist f streng monoton (steigend oder fallend), so ist f injektiv.
Denn aus $x_1 \neq x_2$, also entweder $x_1 > x_2$ oder $x_1 < x_2$, folgt schon $f(x_1) > f(x_2)$ oder $f(x_1) < f(x_2)$, also $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Allerdings ist nicht jede injektive Funktion auch monoton.

Bemerkung 4.18. Eine injektive Abbildung $f : A \to B$ kann durch Einschränken der Zielmenge A auf $f(A)$ in eine bijektive Funktion $g : A \to f(A)$ mit $g(x) := f(x)$ überführt werden.

4.3 Verkettung von Funktionen, Umkehrfunktion

In Beispiel 4.16 haben wir für jedes $y \in \mathbb{R}$ ein geeignetes $x \in \mathbb{R}$ angegeben mit $g(x) = y$. Dabei ist wesentlich, dass $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 + 1$, eine bijektive Funktion ist.

Definition 4.19. Eine Funktion $f : A \to B$ heißt umkehrbar, wenn es zu jedem $y \in A$ genau ein $x \in A$ gibt, für das $f(x) = y$ gilt. Zu einer umkehrbaren Funktion f heißt $g : B \to A$ die **Umkehrfunktion**, falls gilt

$$g(y) = x \quad \Longleftrightarrow \quad y = f(x).$$

Wir schreiben: $g = f^{-1}$.

Beachte: $f^{-1}(x) \neq 1/f(x)$.

Beispiel 4.20 (Berechnung einer Umkehrfunktion)**.** Die Umkehrfunktion erhält man durch Auflösen der Gleichung $f(x) = y$ nach x. Sei $f : \mathbb{R}_+ \to (0,1]$, $f(x) = 1/(x^2+1)$ und $y \in (0,1]$. Dann

$$y = \frac{1}{x^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 = \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad x = \Big(\frac{1}{y} - 1\Big)^{1/2}.$$

Die Umkehrfunktion lautet $f^{-1} : (0,1] \to \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(x) = \sqrt{1/x - 1}$.

Bemerkung 4.21.

(i) Eine Funktion $f : A \to B$ ist genau dann umkehrbar, wenn sie bijektiv ist.

(ii) Der Definitionsbereich der Umkehrfunktion ist der Wertebereich B von f. Der Wertebereich von f^{-1} ist der Definitionsbereich A von f.

(iii) Die Umkehrfunktion f^{-1} ist wieder umkehrbar mit $(f^{-1})^{-1} = f$.

(iv) Graphisch erhält man die Umkehrfunktion durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden.

(v) Für $x \in A$ und $y \in B$ mit $f(x) = y$ gilt

$$f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \quad \text{bzw.} \quad f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x.$$

Die Hintereinanderausführung von f und der Umkehrfuntion liefert die Identität oder **identische Abbildung** $y \mapsto y$.

Allgemein definiert man die Verkettung von Funktionen, die bei der Differentiation und Integralrechnung eine wichtige Rolle spielt, wie folgt.

Definition 4.22. Seien A, B, C Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to C$ Abbildungen. Dann ist die **Verkettung** (Komposition, Hintereinanderausführung) $g \circ f : A \to C$ definiert durch

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \qquad x \in A.$$

Beispiel 4.23. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, und $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $g(x) = \sqrt{x}$. Dann ist $f \circ g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

Da das Bild $f(\mathbb{R})$ dem Definitionsbereich von g entspricht, können wir auch $g \circ f$ bilden. Es gilt

$$g \circ f(x) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Beachte: $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3|$.

Bemerkung 4.24. Die Komposition ist im Allgemeinen nicht kommutativ, d.h. $f \circ g \neq g \circ f$.

4.4 Maximum und Minimum

Definition 4.25. Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) $x_0 \in A$ heißt Minimumstelle von f, falls

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \in A.$$

(ii) $x_0 \in A$ heißt Maximumstelle von f, falls

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in A.$$

Für quadratische Funktionen kann eine Maximum- bzw. Minimumstelle leicht berechnet werden.

Satz 4.26. *Gegeben sei die quadratische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ und $a \neq 0$. Dann gilt*

$$f(x) = a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

und $x_0 := -\frac{b}{2a}$ ist Minimumstelle, falls $a > 0$, und Minimumstelle, falls $a < 0$.

BEWEIS. Mittels quadratischer Ergänzung erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x) &= a\Big(x^2 + \frac{b}{a}x\Big) + c = a\Big(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\Big) - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \end{aligned}$$

Da $(x + b/(2a))^2 \geq 0$ für alle x und in x_0 den Wert 0 annimmt, hat f eine Minimumstelle in x_0, wenn $a > 0$ ist bzw. eine Maximumstelle, falls $a < 0$. □

Bemerkung 4.27. Satz 4.26 liefert unmittelbar die bekannte pq-Formel zur Bestimmung der Nullstellen einer quadratischen Funktion.

$$\begin{aligned} & x^2 + px + q = \Big(x + \frac{p}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{p}{2}\Big)^2 + q = 0 \\ \iff & \\ & x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{oder} \quad x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \end{aligned}$$

wobei die Lösungen nur existieren, falls $p^2/4 \geq q$. Gilt $p^2/4 = q$, so existiert nur eine Nullstelle.

Eine Maximum- oder Minimumstelle existiert nicht für jede Funktion, man betrachte z.B. $f(x) = x^3$ oder $f(x) = 1/x$ mit jeweils maximalem Definitionsbereich.

4.5 Grenzwerte und Stetigkeit

Wir haben in Definition 3.11 den Grenzwert einer Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definiert. Nun soll für eine Funktion f der Grenzwert von $f(x)$ für x gegen a, ∞ oder $-\infty$ definiert werden.

Definition 4.28. Für $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ sowie $a, c \in \mathbb{R}$ sagt man

$$\lim_{x \to a} f(x) = c,$$

falls für jede Folge (x_n) mit $x_n \in A$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c.$$

Analog definiert man

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \text{ bzw. } \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

sowie

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \text{ bzw. } \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

für $a \in \mathbb{R}$ oder $a \in \{\infty, -\infty\}$.

Bemerkung 4.29. Entsprechend wirrd der einseitige Grenzwerte einer Funktion definiert. Wir schreiben für den **linksseitigen Grenzwert** von f an der Stelle a

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) = c \qquad \text{oder} \qquad f(x-) = c, ,$$

falls für jede Folge (x_n) mit $x_n \in A$, $x_n < a$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c.$$

Für den **rechtsseitigen Grenzwert** von f an der Stelle a schreiben wir entsprechend $f(x+) = \lim_{x \searrow a} f(x) = c$. Dabei werden nur Folgen mit $x_n > a$ betrachtet.

Beispiel 4.30.

1. $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, n gerade, dann $\lim_{x\to\infty} x^n = \lim_{x\to-\infty} x^n = \infty$.
2. $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, n ungerade: $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$.
3. $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$. Dann

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Bemerkung 4.31 (Rechenregeln für Grenzwerte)**.** Da Grenzwerte von Funktionswerten als Grenzwerte von Folgen definiert sind, gelten vergleichbare Rechenregeln wie für Folgen. Seien g, f Funktionen mit

$$\lim_{x \to a} g(x) = y \in \mathbb{R}$$

und

$$\lim_{x \to a} f(x) = z \in \mathbb{R},$$

sowie $\in \mathbb{R}$. Dann gilt

1.
$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = y + z$$

2.
$$\lim_{x\to a}(c\cdot f(x)) = c\cdot \lim_{x\to a} f(x) = c\cdot y$$

3.
$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x) = y\cdot z.$$

4. Falls $z \neq 0$, dann
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{y}{z}.$$

Beispiel 4.32. Für $f(x) = (x^2+2)/(3-x)^2$ gilt
$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\frac{(-1)^2+2}{(3-(-1))^2} = \frac{3}{16}$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\frac{1+2/x^2}{9/x^2-6/x+1} = \frac{1}{1} = 1$$

Stetigkeit

Definition 4.33 (Stetigkeit)**.** Sei $A\subset\mathbb{R}$. Eine Funktion $f : A\to\mathbb{R}$ heißt stetig in $a\in A$, wenn gilt:
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$
f heißt stetig, wenn f in jedem Punkt $a\in A$ stetig ist.

Der Graph einer stetigen Funktion f, die auf einem Definitionsbereich ohne Lücken definiert ist, hat keine Srünge oder Pole.

Beispiel 4.34. 1. Jedes Polynom $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ist stetig.

2. $f : \mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, ist stetig.

3. $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(0) = 0$ und $f(x) = x/|x|$ sonst, ist nicht stetig.

Bemerkung 4.35. Sind f und g stetige Funktionen, $c\in\mathbb{R}$, dann sind die Funktionen
$$f+g, f-g, c\cdot f, f/g, \text{ falls } g\neq 0, f\circ g$$
stetig.

Für stetige Funktionen, die auf einem **Intervall** definiert sind, gelten zwei wichtige Sätze.

Satz 4.36 (Zwischenwertsatz)**.** *Sei $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und y ein Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $x\in[a,b]$ mit $f(x) = y$.*

Aus dem Zwischenwertsatz folgt, das jede stetige Funktion $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ oder umgekehrt mindestens eine Nullstelle in (a,b) besitzt.

Satz 4.37 (Satz vom Minimum und Maximum)**.** *Sei $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und hat auf $[a.b]$ ein Minimum und ein Maximum.*

5 Spezielle Funktionen

In diesem Kapitel sollen einige spezielle Funktionen vorgestellt werden.

5.1 Polynome

Definition 5.1 (Polynom n-ten Grades)**.** Eine Funktion der Form $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R},$$

mit Koeffizienten $a_0, \dots a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, heißt **Polynom n-ten Grades**.

Polynome sind stetige Funktionen und haben nach Satz 4.37 auf jedem Intervall $[a, b]$ ein Minimum und ein Maximum. Ist $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ein Polynom vom Grad n, dann folgt aus der Darstellung

$$p_n(x) = a_n x^n \Big(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\Big)$$

sofort:

$$\lim_{x\to\infty} p_n(x) = \infty,$$

falls $a_n > 0$,

$$\lim_{x\to-\infty} p_n(x) = \infty,$$

falls ($a_n > 0$ und n gerade) oder ($a_n < 0$ und n ungerade),

$$\lim_{x\to-\infty} p_n(x) = -\infty,$$

falls $a_n > 0$ und n ungerade) oder ($a_n < 0$ und gerade).

Satz 5.2. *Ein Polynom p_n vom Grad $n > 0$ hat höchstens n Nullstellen. Ist x_0 eine Nullstelle von p_n, d.h. $p_n(x_0) = 0$, dann existiert ein Polynom p_{n-1} vom Grad $n-1$, so dass gilt*

$$p_n(x) = (x - x_0) \cdot p_{n-1}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Die Abspaltung des Faktors $(x - x_0)$ gelingt mit Polynomdivision. Die wiederholte Anwendung von Satz 5.2 liefert

Satz 5.3. *Ist $p_n(x_0) = 0$, dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, und ein Polynom p_{n-m} vom Grad $n - m$ mit $p_{n-m}(x_0) \neq 0$, so dass gilt*

$$p_n(x) = (x - x_0)^m \cdot p_{n-m}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

5.2 Rationale Funktionen

Definition 5.4. Seien p_n und q_n Polynome vom Grad n bzw. m und $D = \{x \in \mathbb{R} : q_n(x) \neq 0\}$. Die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)},$$

heißt **rationale Funktion**.

Die Nullstellen von q_m sind die Definitionslücken. Ist x_0 Nullstelle von q_m, dann gibt es Zahlen $s \in \{0, \ldots, n\}$, $r \in \{1, \ldots, m\}$ und Polynome p_{n-s} und q_{n-r} mit $p_{n-s}(x_0) \neq 0$ und $q_{m-r}(x_0) \neq 0$, so dass

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{(x-x_0)^s p_{n-s}(x)}{(x-x_0)^r q_{m-r}(x)} = (x-x_0)^{s-r} \frac{p_{n-s}(x)}{q_{m-r}(x)}.$$

Daraus folgt:

- Falls $s < r$, dann hat f in x_0 eine Polstelle, d.h.

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) \in \{-\infty, \infty\} \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \searrow x_0} f(x) \in \{-\infty, \infty\}.$$

- Falls $s \geq r$, dann ist f in x_0 stetig ergänzbar, d.h. es gibt $c \in \mathbb{R}$ mit

$$c = \lim_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} 0, & s > r \\ p_{n-s}(x_0)/q_{m-r}(x_0), & s = r \end{cases}.$$

Beispiel 5.5. Sein $p_3(x) = x^3 + x^2 = (x-0)^2(x+1)$ und $q_2(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$. Dann ist $\{x \in \mathbb{R} : q_2(x) = 0\} = \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$. Es gilt

$$\frac{p_3(x)}{q_2(x)} = (x+1)^0 \frac{x^2}{x-1}.$$

Also ist die Funktion $f(x) = p_3(x)/q_2(x)$ in $x_0 = -1$ stetig ergänzbar. Dagegen hat sie in $x_1 = 1$ eine Polstelle, da

$$\frac{p_3(x)}{q_2(x)} = (x-1)^{-1} \frac{x^2(x+1)}{x+1}.$$

5.3 Die Exponentialfunktion und der natürliche Logarithmus

Wir betrachten zunächst ein Beispiel. Auf einem Konto wird ein Euro zu einem Zinssatz von 100% angelegt. Bei jährlicher, monatlicher bzw. täglicher Zinszahlung beträgt das Kapital nach einem Jahr:

- Bei jährlicher Zinszahlung:

$$(1+1) = 2.$$

- Bei monatlicher Zinszahlung:

$$\Big(1+\frac{1}{12}\Big)^{12} = 2.613.$$

- Bei täglicher Zinszahlung:

$$\Big(1+\frac{1}{360}\Big)^{360} = 2.7145.$$

Bei n Zinszahlungen gilt entsprechend $(1 + 1/n)^n$. Je größer n wird, umso mehr nähert sich der Betrag am Ende des Jahres der (irrationalen) Zahl $e = 2.718281828...$ an. Allgemein gilt folgendes Resultat.

Satz 5.6. *Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist die Folge $a_n := (1 + x/n)^n$, $n \in \mathbb{N}$, konvergent.*

Dies gibt Anlass zu folgender Definition.

Definition 5.7. Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\exp(x) := \lim_{n\to\infty} \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n, \qquad x \in \mathbb{R},$$

heißt **Exponentialfunktion**. Man schreibt auch e^x für $\exp(x)$.

Für $x = k/m$ mit $k, m \in \mathbb{N}$ gilt nach den Regeln der Potenzrechnung und Satz 5.6

$$\Big(1+\frac{k/m}{n}\Big)^n = \bigg(\Big(1+\frac{1}{nm/k}\Big)^{nm/k}\bigg)^{k/m} \underset{n\to\infty, n/k\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} e^{k/m}$$

Dies rechtfertigt die Schreibweise $e^x = \exp(x)$ für positive rationale Zahlen x. Allgemein gelten für die Exponentialfunktion Rechenregeln wie für Potenzen:

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

und

$$\exp(c \cdot x) = (\exp(x))^c.$$

Durch $e^x = \exp(x)$ kann die Potenz von e mit einem beliebigen Exponenten $x \in \mathbb{R}$ definiert werden. Diese Definition ist konsistent zur schon bekannten Definition für rationale Exponenten.

Bemerkung 5.8 (Eigenschaften der Exponentialfunktion)**.**

1. $e^0 = 1$.
2. Es gilt $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
3. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.
4. Die Exponentialfunktion ist stetig, streng monoton steigend und injektiv. Weiterhin ist $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ auch surjektiv und somit bijektiv.

Da die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ bijektiv ist, existiert auch die Umkehrfunktion.

Definition 5.9. Der Umkehrfunktion $ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ von der Exponentialfunktion wird als **natürlicher Logarithmus** bezeichnet.

Für $x \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ gilt also

$$x = \ln(a) \quad \Longleftrightarrow \quad a = e^x$$

sowie

$$\ln\left(e^x\right) = x \qquad \text{und} \qquad e^{\ln(a)} = a.$$

Bemerkung 5.10. Für $x, y > 0$, $c \in \mathbb{Q}$ gelten die folgende Rechenregeln:

1. $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$,
2. $\ln(x^c) = c \cdot \ln(x)$.

5.4 Allgemeine Potenzen und Logarithmen

Nun sollen allgemeine Potenzen der Form a^x für $a > 0$ definiert werden. Mit den Rechenregeln für die Exponentialfunktion erhält man für natürliche Zahlen $k, m \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{–mal}} = a^m = \left(e^{\ln(a)}\right)^m = e^{m \cdot \ln(a)}$$

und

$$\sqrt[k]{a^m} = a^{m/k} = \left(e^{\ln(a)}\right)^{m/k} = e^{m/k \cdot \ln(a)}.$$

Allgemein definiert man a^x wie folgt.

Definition 5.11. Sei $a > 0$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit

$$f(x) = a^x := \exp\left(x \cdot \ln(a)\right) = e^{x \cdot \ln(a)}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

heißt **allgemeine Exponentialfunktion** zur Basis a.

Bemerkung 5.12. Es gelten die bekannten Rechenregeln für Potenzen. Seien $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$. Dann

1. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$,
2. $a^{c \cdot x} = (a^x)^c = (a^c)^x$,
3. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$.

Die allgemeine Exponentialfunktion zur Basis $a \neq 1$ ist bijektiv und damit umkehrbar.

Definition 5.13. Sei $a > 0, a \neq 1$. Die Umkehrfunktion $\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ von der Funktion $x \mapsto a^x$ heißt **Logarithmusfunktion zur Basis a**. Der Wert $\log_a(x)$ heißt Logarithmus von x zur Basis a.

Für $a, b > 0$, $a \neq 1$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$c = \log_a b \quad \Longleftrightarrow \quad a^c = b.$$

Bemerkung 5.14. Der **Logarithmus von b zur Basis a** (auch: a-Logarithmus von b) ist also diejenige Zahl, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten. Es gilt also per Definition:

$$a^{\log_a b} = b$$

und

$$\log_a a^c = c$$

Aus der zweiten Beziehung folgt unmittelbar für $c = 0$ bzw. $c = 1$:

$$\log_a 1 = 0, \ \log_a a = 1.$$

Der Logarithmus zur Basis 10 heißt **dekadischer Logarithmus** (i.Z. lg), der Logarithmus zur Basis e ist der schon bekannte natürliche Logarithmus, also $\ln = \log_e$.
Merke: Basis und Argument des Logarithmus sind immer positiv.

Satz 5.15. *Es gilt für $a, b > 0$, $a \neq 1$:*

$$\log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$

Beispiel 5.16.

- $2^x = 16 \ \Leftrightarrow \ x = \log_2 16 \ \Leftrightarrow \ x = 4$
- $2 = \log_x 36 \ \Leftrightarrow \ x^2 = 36 \ \Leftrightarrow \ x = 6$
- $x = \log_5 125 \ \Leftrightarrow \ 5^x = 125 \ \Leftrightarrow \ x = 3$
- $5 = \log_3 x \ \Leftrightarrow \ 3^5 = x \ \Leftrightarrow \ x = 243$

Satz 5.17. *Für den Logarithmus zur Basis a gelten folgende Rechenregeln ($c, d, x > 0$):*

(i) $\log_a(c \cdot d) = \log_a c + \log_a d$,

(ii) $\log_a \left(\frac{c}{d}\right) = \log_a c - \log_a d$,

(iii) $\log_a x^b = b \cdot \log_a x, \ b \in \mathbb{R}$.

6 Differentiation

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und x, $x_h = x + h$ zwei verschiedene Punkte auf der x-Achse. Eine Gerade durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(x_h, f(x_h))$ nennen wir eine **Sekante**. Die Steigung der Sekante ist gegeben durch den **Differenzenquotienten**

$$\Delta_x(h) = \frac{f(x_h) - f(x)}{x_h - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Für $h \to 0$ geht die Sekante über in die Tangente im Punkt x. Die Steigung der Tangente ergibt sich als Grenzwert des Differenzenquotienten $\Delta_x(h)$ für $h \to 0$, falls dieser Grenzwert existiert.

Definition 6.1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x \in \mathbb{R}$. Falls der Grenzwert von $\Delta_x(h)$ für $h \to 0$ existiert, dann heißt f in x differenzierbar mit der **Ableitung**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Man schreibt auch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x).$$

$f'(x)$ heißt auch **Differentialquotient**.

Ist f in x differenzierbar, dann ist f auch stetig in x, da $f(x+h) - f(x) \to 0$ gilt für $h \to 0$. Die Umkehrung gilt aber nicht.
Die Funktion $f(x) = |x|$ ist stetig aber nicht differenzierbar in 0, da

$$\Delta_0(h) = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \begin{cases} 1, & h > 0 \\ -1, & h < 0 \end{cases}$$

in 0 nicht konvergent ist.
Die Tangente an den Graphen von f in a ist eine lineare Funktion, die Tangentenfunktion. Die Formel lautet

$$t_{f,a}(x) = f'(a)(x-a) + f(a), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

6.1 Rechenregeln

Folgende Verknüpfungen von Funktionen führen wieder zu differenzierbaren Funktionen.

Satz 6.2. *Sind f, g in x differenzierbar, dann gelten die folgenden Rechenregeln.*

(i)

$$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x), \quad (f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x),$$

wobei $c \in \mathbb{R}$.

(ii) ***Produktregel:***

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

(iii) ***Quotientenregel****:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2},$$

falls $g(x) \neq 0$.

Satz 6.3 (Kettenregel)**.** *Ist die Funktion g in x und die Funktion f in $z = g(x)$ differenzierbar, dann ist auch $f \circ g(x) = f(g(x))$ in x differenzierbar und es gilt:*

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x).$$

Satz 6.4 (Ableitung der Umkehrfunktion)**.** *Ist f umkehrbar und differenzierbar in x mit der Ableitung $z = f'(x)$, dann ist die Umkehrfunktion in z differenzierbar mit der Ableitung*

$$\frac{d}{dz} f^{-1}(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}.$$

Ableitungen einiger wichtiger Funktionen:

$f(x)$	$f'(x)$	Voraussetzungen
$c = konst$	0	
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}$ oder
		$n \in \mathbb{Z},\ x \neq 0$ oder
		$n \in \mathbb{R},\ x > 0$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n \in \mathbb{N},\ x > 0$
e^x	e^x	
a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$a > 0,\ a \neq 1$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$

6.2 Höhere Ableitungen

Da die Ableitung einer Funktion wieder eine Funktion ist, kann sie gegebenenfalls wieder differenziert werden. Man schreibt dann

$$f''(x) = (f')'(x) = \frac{d}{dx} f'(x)$$

und entsprechend f''' und allgemeiner

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \frac{d}{dx} f^{(n)}(x).$$

In diesem Fall nennen wir f in x auch $(n+1)$-fach differenzierbar.
Das Vorzeichen der ersten Ableitung beschreibt das Monotonieverhalten.

Bemerkung 6.5. Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Es gilt

$$\begin{aligned}
f'(x) \geq 0 \text{ für alle } x &\iff f \text{ monoton wachsend,}\\
f'(x) > 0 \text{ für alle } x &\iff f \text{ streng monoton wachsend,}\\
f'(x) \leq 0 \text{ für alle } x &\iff f \text{ monoton fallend,}\\
f'(x) < 0 \text{ für alle } x &\iff f \text{ streng monoton fallend.}
\end{aligned}$$

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung beschreibt das Krümmungsverhalten.

Bemerkung 6.6. Es gilt

$$\begin{aligned}
f''(x) \geq 0 \text{ für alle } x &\implies f \text{ ist konvex (Linkskrümmung),}\\
f''(x) \leq 0 \text{ für alle } x &\implies f \text{ ist konkav (Rechtskrümmung).}
\end{aligned}$$

Satz 6.7 (Regel von L'Hôspital)**.**
Sind f, g differenzierbar und gilt entweder

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$$

oder

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty = \lim_{x\to a} g(x)$$

für $a \in \mathbb{R}$ oder $a \in \{-\infty, \infty\}$, dann gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Die Regel darf auch mehrfach angewendet werden.

6.3 Nullstellenberechnung

Wir betrachten zwei Verfahren zur numerischen Bestimmung einer Nullstelle.

Regula Falsi: Sei $f[a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in den Punkten a und b unterschiedliches Vorzeichen hat. Dann wissen wir nach dem Zwischenwertsatz 4.36, dass f auf dem Intervall $[a, b]$ mindestens eine Nullstelle besitzt.
Als erste Näherung wählt man die Nullstelle der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$. Die Formel für die Sekante lautet

$$s_{a,b}(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Die erste Näherung x_1 erhält man als Nullstelle von $s_{a,b}$, also $s_{a,b}(x_1) = 0$. Nach Umformung erhält man

$$x_1 = a - f(a)\frac{b - a}{f(b) - f(a)} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Ist $f(x_1) = 0$, dann hat man eine Nullstelle gefunden. Andernfalls wird dieses Verfahren über dem kleineren Intervall $[a_1, b_1] = [a, x_1]$ oder $[a_1, b_1] = [x_1, b]$ wiederholt, je nachdem, ob $f(a)$ und $f(x_1)$ unterschiedliches Vorzeichen haben oder ob $f(x_1)$ und $f(b)$ unterschiedliches Vorzeichen besitzen. Mit den Startwerten $a_0 = a$ und $b_0 = b$ erhält man folgende Iteration:

1. Schritt: Berechne
$$x_n = \frac{a_{n-1}f(b_{n-1}) - b_{n-1}f(a_{n-1})}{f(b_{n-1}) - f(a_{n-1})}$$
2. Schritt: Falls $|x_n - x_{n-1}| <$ geforderte Genauigkeit, breche die Iteration ab und wähle $x^* = x_n$ als hinreichend gute Näherung.

   Ist das Abbruchkriterium nicht erfüllt, dann setzte $[a_n, b_n] = [a_{n-1}, x_n]$, falls die Vorzeichen von $f(a)$ und $f(x_1)$ unterschiedlich sind, und ansonsten $[a_n, b_n] = [x_n, b_{n-1}]$.

   Erhöhe n um 1 und führe Schritt 1 erneut durch.

Wenn man nicht abbricht, dann konvergiert die Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ immer gegen eine Nullstelle der Funktion f im Intervall $[a, b]$.

Newton-Verfahren: Hier wird eine differenzierbare Funktion $f[a, b] \to \mathbb{R}$ vorausgesetzt. Es wird wieder eine Iteration durchgeführt, wobei man als Näherung x_{n+1} im $(n + 1)$-ten Schritt die Nullstelle der Tangente
$$t_{x_n}(x) = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$$
an f im Punkt x_n wählt. Man erhält die Iteration
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Das Newton-Verfahren konvergiert in der Regel schneller, allerdings ist die Konvergenz nicht garantiert. (Bsp.: $f(x) = x^3 - 2x + 2$ mit Startwert 0 oder 1.) Unter Umständen liefert das Verfahren einen Wert x_n, der nicht mehr im Definitionsbereich der Funktion liegt.

6.4 Lokale Maxima und Minima

Mit Hilfe der Differentialrechnung können lokale Maxima und Minima von Funktionen bestimmt werden.

Definition 6.8. (Vgl. auch Definition 4.25)
Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt ein Punkt $x_0 \in A$

(i) **lokale Minimumstelle** von f, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass
$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \in A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon),$$

(ii) **lokale Maximumstelle** von f, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass
$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Satz 6.9 (Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum)**.**
Sei f in x_0 differenzierbar und x_0 sei kein Randpunkt des Definitionsbereiches. Ist x_0 eine lokale Minimum- oder Maximumstelle von f, dann gilt
$$f'(x_0) = 0.$$
Man nennt Punkte mit $f'(x) = 0$ auch stationäre Punkte.

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, dann können also höchstens die Nullstellen der Ableitung oder die Randpunkte lokale Minimum- oder Maximumstellen sein (notwendiges Kriterium).
Um zu überprüfen, ob eine Nullstelle x_0 der Ableitung auch tatsächlich ein lokale Extremstelle ist, muss man das Wachstumsverhalten in einer Umgebung von dieser Nullstelle untersuchen.

- Ist die Funktion links von x_0 monoton wachsend und rechts davon monoton fallend, so ist x_0 eine lokale Maximumstelle.
- Ist die Funktion links von x_0 monoton fallend und rechts davon monoton wachsend, so ist x_0 eine lokale Minimumstelle.
- x_0 ist dagegen keine Extremstelle, wenn in einer Umgebung von x_0 die Funktion entweder streng monoton steigend oder fallend ist.

Ist die Funktion f in einer Umgebung von x_0 differenzierbar, dann kann das Wachstumsverhalten auch mit Hilfe der ersten Ableitung untersucht werden. Dabei wird überprüft, ob diese in x_0 einen Vorzeichenwechsel hat.

Satz 6.10. *f sei auf der Menge $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ differenzierbar für ein $\varepsilon > 0$ mit $f'(x_0) = 0$.*

(i) Falls $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ und $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, dann ist x_0 ein lokaler Maximumpunkt.

(ii) Falls $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ und $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, dann ist x_0 ein lokaler Minimumpunkt.

(iii) Falls $f'(x) < 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ und für alle $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, dann ist x_0 kein lokaler Extrempunkt.

(iv) Falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ und für alle $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, dann ist x_0 kein lokaler Extrempunkt.

Schließlich kann auch mit Hilfe der zweiten Ableitung untersucht werden, ob die Bedingungen von Satz 6.10 (i) oder (ii) erfüllt sind.

Satz 6.11 (Hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum)**.**
Sei f zweimal differenzierbar, x_0 kein Randpunkt und $f'(x_0) = 0$.

(i) Ist $f''(x_0) < 0$, dann ist x_0 ein lokaler Maximumpunkt.

(ii) Ist $f''(x_0) > 0$, dann ist x_0 ein lokaler Minimumpunkt.

6.5 Wendepunkte

Sei f zweimal differenzierbar und $f''(x_w) = 0$. Falls f'' in x_w sein Vorzeichen wechselt, dann heißt x_w Wendepunkt. Gilt zusätzlich $f'(x_w) = 0$, so nennt man x_w einen Sattelpunkt. Wendepunkte sind lokale Extrempunkte der Ableitung. In diesen Punkten wechselt das Krümmungsverhalten der Funktion f von konkav (rechtsgekrümmt) nach konvex (linksgekrümmt) oder umgekehrt.

7 Integralrechnung

Eine wesentliche Aufgabe der Integralrechnung besteht darin, den Zusammenhang zwischen der Umkehrung der Differentiation und der Berechnung von Flächeninhalten zu beschreiben.

7.1 Das bestimmte Integral und Flächeninhalte

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine nicht negative stetige Funktion. Gesucht ist die Fläche A, die vom Graphen der Funktion, der x-Achse sowie den Senkrechten $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird.
Formal wird der Begriff des Flächeninhalts im allgemeinen Fall mit Hilfe des Grenzwertbegriffes definiert, indem die Fläche von unten und oben durch stückweise konstante Funktionen angenähert wird, für deren Flächenberechnung man nur wissen muss, dass der Inhalt eines Rechtecks mit Kantenlängen a und b gleich dem Produkt $a \cdot b$ ist.
Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ in Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ mit

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Auf jedem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ werden der kleinste bzw. größte Funktionswert von f bestimmt

$$u_i := \min\{f(x) : x_i \le x \le x_{i+1}\} \text{ und } o_i := \max\{f(x) : x_i \le x \le x_{i+1}\},$$

so dass ein Rechteck mit Höhe u_i unter den Funktionsgraphen passt, und ein Rechteck der Höhe o_i den Funktionsgraphen einschließt. Für eine solche Zerlegung Z definieren wir die zugehörige **Untersumme** und **Obersumme** durch

$$U(Z, f) = \sum_{i=0}^{n-1} u_i \cdot (x_{i+1} - x_i) \text{ und } O(Z, f) = \sum_{i=0}^{n-1} o_i \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Offensichtlich ist $U(Z, f) \le O(Z, f)$ und bei einer vernünftigen Definition sollte der Flächeninhalt A zwischen diesen beiden Werten liegen. Je feiner die Zerlegung Z, desto näher sollten die oberen und unteren Schranken am gesuchten Flächeninhalt liegen.
Formal wird deshalb das Feinheitsmaß

$$|Z| = \max_{i=0,\ldots,n-1} |x_{i+1} - x_i|$$

definiert als die Breite des längsten Intervalls der Zerlegung, und die Fläche A wird definiert durch Grenzübergang $|Z| \to 0$, d.h.

$$A := \lim_{|Z| \to 0} U(Z, f) = \lim_{|Z| \to 0} O(Z, f),$$

falls diese beiden Grenzwerte übereinstimmen. Man kann zeigen, dass diese beiden Grenzwerte immer existieren und übereinstimmen, falls f stetig ist. Man nennt diesen Grenzwert das **bestimmte Integral**. Für eine beliebige (evtl. nicht stetige) Funktion f ist das bestimmte Integral nur dann definiert, wenn beide Grenzwerte übereinstimmen.

Definition 7.1 (Riemann-Integral)**.**
Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt (Riemann-)**integrierbar**, falls die beiden Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} U(Z_n, f)$ und $\lim_{n\to\infty} O(Z_n, f)$ für jede Folge von Zerlegungen Z_n mit $\lim_{n\to\infty} |Z_n| = 0$ existieren und übereinstimmen.
Dann nennt man den Grenzwert **bestimmtes Integral** von f über $[a, b]$ und schreibt:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|Z|\to 0} U(Z, f) = \lim_{|Z|\to 0} O(Z, f).$$

Dabei heißt a **untere Integrationsgrenze** und b **obere Integrationsgrenze**. Die Funktion f heißt **Integrand** und x heißt **Integrationsvariable**.

Die Integrationsvariable kann beliebig umbenannt werden. Es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(t)dt.$$

Stetige und stückweise stetige Funktionen mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen sind immer integrierbar. Es gibt aber auch Funktionen, die nicht Riemann-integrierbar sind, wie z.B.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel 7.2. Wir wollen mit der Definition des Integrals die Trapezfläche $\int_a^b x dx$ berechnen. Aus der Elementargeometrie sollte bekannt sein, dass für die zugehörige Fläche gilt

$$\int_a^b x dx = \frac{a+b}{2}(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Für den formalen Nachweis dieser Formel mit obiger Definition zerlegen wir das Intervall $[a, b]$ in n äquidistante Teilintervalle der Länge $(b-a)/n$. Also ist $x_i = a + i(b-a)/n$. Wegen der Monotonie der Funktion $f(x) = x$ ist deshalb

$$u_i = a + i\frac{b-a}{n} \text{ und } o_i = a + (i+1)\frac{b-a}{n}.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} U(Z, f) &= \sum_{i=0}^{n-1} u_i \cdot (x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \left(an + \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} i\right). \end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$$

ergibt sich damit

$$\begin{aligned} U(Z,f) &= \frac{b-a}{n} \cdot \left(an + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{(n-1)n}{2} \right) \\ &= (b-a)\Big(a + \frac{b-a}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \Big). \end{aligned}$$

Durch Grenzübergang $|Z| \to 0$ bzw. $n \to \infty$ erhält man

$$\lim_{|Z|\to 0} U(Z,f) = (b-a)\Big(a + \frac{b-a}{2} \Big) = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Analog erhält man für die Obersumme $O(Z,f)$ wegen $o_i = u_i + (b-a)/n$

$$O(Z,f) = U(Z,f) + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{b-a}{n} \cdot n = U(Z,f) + \frac{(b-a)^2}{n}$$

den gleichen Grenzwert und somit

$$\int_a^b x dx = \lim_{|Z|\to 0} U(Z,f) = \lim_{|Z|\to 0} O(Z,f) = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Folgende elementaren Eigenschaften des bestimmten Integrals lassen sich einfach aus der Definition herleiten und sind anschaulich klar.

Satz 7.3. *Für integrierbare Funktionen f, g und $c \in \mathbb{R}$ gilt*

(i) $c \cdot f$ *ist integrierbar und*

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx,$$

(ii) $f + g$ *ist integrierbar und*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Außerdem gilt offensichtlich folgende **Intervalladditivität**.

Satz 7.4. *Es sei f in $[a,b]$ und in $[b,c]$ integrierbar. Dann gilt:*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Aus Satz 7.4 lässt sich sofort folgern, dass eine stückweise stetige Funktion mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_n = b$$

integrierbar ist mit

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)dx.$$

Wir definieren bestimmte Integrale auch für die Fälle $a = b$ und $a > b$ so, dass weiterhin Satz 7.4 gilt, auch wenn diese keine Bedeutung als Flächeninhalte haben.

Definition 7.5. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann setzt man

$$a) \quad \int_a^a f(x)dx = 0, \qquad b) \quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Damit gilt die Beziehung

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0.$$

7.2 Integration und Stammfunktion

Wir untersuchen nun den Zusammenhang zwischen dem bestimmtem Integral und der Differentiation. Dazu definieren wir die **Integralfunktion** (Flächeninhaltsfunktion)

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \leq x \leq b.$$

Es gilt der folgende **1. Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung**.

Satz 7.6. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Integralfunktion $F(x)$ von f auf $[a, b]$ differenzierbar und es gilt*

$$F'(x) = f(x).$$

BEWEIS. Aus Satz 7.4 folgt sofort für ein beliebiges $h > 0$ und $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt. \end{aligned}$$

Sei

$$m_h := \min\{f(t) : x \leq t \leq x + h\} \text{ und } M_h := \max\{f(t) : x \leq t \leq x + h\}.$$

Dann gilt

$$hm_h \leq F(x + h) - F(x) \leq hM_h,$$

also

$$m_h \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq M_h.$$

Aus der Stetigkeit von f folgt $\lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} M_h = f(x)$ und somit

$$f(x) \leq \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq f(x),$$

folglich $F'(x) = f(x)$. □

Der Satz 7.6 besagt gerade, dass $f(x)$ die Ableitung der Integralfunktion $F(x)$ ist. Die Integration kann also als Umkehrung der Differentiation betrachtet werden.

Definition 7.7. Sei f eine gegebene stetige Funktion im Intervall $[a, b]$. Eine differenzierbare Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** zu f, falls gilt:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Stammfunktionen sind nicht eindeutig, z.B. gilt $(x^2+1)' = 2x = (x^2)'$. Addiert man zu einer Stammfunktion eine Konstante, so erhält man eine weitere Stammfunktion.

Satz 7.8. *Sei f stetig auf $[a, b]$, und F_1 eine Stammfunktion zu f. Dann erhält man sämtliche Stammfunktionen F zu f durch*

$$F(x) = F_1(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Das bedeutet, dass sich zwei Stammfunktionen F_1 und F_2 zu $f(x)$ nur um eine Konstante unterscheiden.

Definition 7.9. Die Menge aller Stammfunktionen zu f in $[a, b]$ heißt **unbestimmtes Integral** und wird mit $\int f(x)dx$ bezeichnet. Man verwendet auch die (mathematisch nicht ganz korrekte Schreibweise) $\int f(x)dx = F(x) + c$.

Wir erhalten folgende Tabelle für einige der wichtigsten Integrale:

$f(x)$	$\int f(x)dx$	Bemerkungen
0	c	$c =$ const.
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$n \neq -1$
$(ax+b)^n$	$\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c$	$n \neq -1,\ a \neq 0$
$1/x$	$\ln(x) + c$	$x > 0$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln(ax+b) + c$	$ax+b > 0,\ a \neq 0$
e^x	$e^x + c$	
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b} + c$	$a \neq 0$

Beispiel 7.10. (i)

$$\int 1 dx = x + c;$$

(ii)

$$\int x^7 dx = \frac{1}{8} x^8 + c;$$

(iii)

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + c;$$

(iv)

$$\int (3z-2)^2 dz = \frac{1}{3} \frac{(3z-2)^3}{3} + c;$$

(v)

$$\int e^{-0.1t} dt = -10 e^{-0.1t} + c.$$

Den Zusammenhang zwischen beliebigen Stammfunktionen von f und dem bestimmten Integral liefert der **2. Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung**.

Satz 7.11. *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, und F eine beliebige Stammfunktion zu f. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

BEWEIS. Sei $F_a(x) = \int_a^x f(s) ds$ die Integralfunktion. Da F_a eine weitere Stammfunktion ist, gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $F(x) = F_a(x) + c$. Mit $F_a(a) = 0$ folgt

$$F(b) - F(a) = F_a(b) - F_a(a) = \int_a^b f(s) ds.$$

□

Damit können wir uns die komplizierte Berechnung von bestimmten Integralen über die Berechnung des Grenzwertes von Ober- und Untersummen ersparen, und durch die Bestimmung von Stammfunktionen ersetzen. Außerdem rechtfertigt dieser Satz im Nachhinein die Verwendung des gleichen Symbolik ($\int$ bzw. $\int_a^b$).

Konvention: Man benützt oft folgende Schreibweisen bei der Berechnung von bestimmten Integralen mittels Stammfunktionen:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Beispiel 7.12. a) Wir wiederholen die Berechnung von $\int_a^b x dx$ mit Hilfe des 2. Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung. Eine Stammfunktion von $f(x) = x$ ist gegeben durch $F(x) = x^2/2 + c$ mit einer beliebigen Konstante c. Aus Satz 7.11 folgt damit

$$\int_a^b x\, dx = F(b) - F(a) = \frac{b^2}{2} + c - \left(\frac{a^2}{2} + c\right) = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Aus der komplizierten Rechnung mit Hilfe der Grenzwerte von Ober- und Untersummen wird also ein einfacher Einzeiler, und wie man am Beispiel noch mal sieht, spielt die Wahl der Konstante c keine Rolle.

b) Wir berechnen den Flächeninhalt zwischen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, der x-Achse, und den Geraden $x = 1$ und $x = 4$:

$$\int_1^4 \sqrt{x}\, dx = \int_1^4 x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2}\Big|_1^4 = \frac{2}{3} 4^{3/2} - \frac{2}{3} 1^{3/2} = \frac{14}{3}.$$

7.3 Spezielle Integrationstechniken

Wir betrachten zunächst den Fall von Produktintegration. Hier gilt folgende Regel, die man auch **partielle Integration** nennt.

Satz 7.13. *Es seien f, f', g, g' stetige Funktionen. Dann gilt*

$$\int f(x) g'(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx. \tag{1}$$

BEWEIS. Nach der Produktregel der Differenziation gilt

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Also ist $f(x)g(x)$ eine Stammfunktion von der rechten Seite und wir erhalten

$$\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) + c.$$

Durch Umstellen folgt daraus (1). □

Für das zugehörige bestimmte Integral gilt dann die analoge Regel

$$\boxed{\int_a^b f(x) g'(x)\, dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x)\, dx} \tag{2}$$

Dieses Verfahren der partiellen Integration empfiehlt sich, wenn folgende zwei Voraussetzungen erfüllt sind:

1. Der Integrand kann als Produkt aufgefasst werden, dessen einer Faktor (nämlich $g'(x)$) leicht integriert werden kann (zu $g(x)$).

2. Das auf der rechten Seite von (1) stehende Integral $\int f'(x)g(x)\, dx$ ist einfacher zu lösen als das ursprüngliche Integral $\int f(x)g'(x)\, dx$.

Beispiel 7.14. Gesucht ist $\int x \ln(x)\, dx$ (für $x > 0$). Der zweite Faktor $\ln(x)$ ist nicht ohne weiteres integrierbar, wohl aber der erste ($= x$). Also setzen wir $g'(x) = x$ und $f(x) = \ln(x)$. Dann ist $g(x) = x^2/2$ eine Stammfunktion von $g'(x)$ und $f'(x) = 1/x$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int x \ln(x)\, dx &= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\, dx \\ &= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + c\end{aligned}$$

Also erhält man z.B.

$$\begin{aligned}\int_2^3 x \ln(x)\, dx &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right]_2^3 \approx 2.3075.\end{aligned}$$

Aus der Kettenregel der Differenziation kann man folgende **Substitutionsregel** herleiten.

Satz 7.15. *Es sei f stetig und h stetig differenzierbar. Dann gilt mit $u = h(x)$*

$$\int f(h(x)) \cdot h'(x)\, dx = \int f(u)\, du \tag{3}$$

Ist zusätzlich h umkehrbar mit Umkehrfunktion h^{-1}, dann gilt mit $x = h^{-1}(u)$

$$\int f(h(x)) dx = \int f(u) \cdot (h^{-1})'(u)\, du. \tag{4}$$

BEWEIS. Wir zeigen, dass die Ableitungen der beiden Seiten von Gleichung (3) nach x übereinstimmen. Sei $\int f(u)\, du = F(u) + c$. Wegen $u = h(x)$ ist $du/dx = h'(x)$ und somit

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int f(h(x)) \cdot h'(x)\, dx = f(h(x))h'(x) &= f(u)\frac{du}{dx} = \frac{dF(u)}{du}\cdot\frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{dx}F(u) = \frac{d}{dx}\int f(u)\, du.\end{aligned}$$

Die Regel (4) folgt aus (3) mit $x = h^{-1}(u)$ wie folgt:

$$\int f(u) \cdot (h^{-1})'(u)\, du = \int f(h(h^{-1}(u))) \cdot (h^{-1})'(u)\, du = \int f(h(x)) dx$$

□

Bemerkung: Damit wird spätestens deutlich, warum es sinnvoll ist, das Differential dx immer mit anzugeben. Der Satz besagt nämlich, dass wenn man im Integranden $f(h(x))$ die Variable x durch $x = h^{-1}(u)$ substituiert, dass man dann auch das Differential dx substituieren muss durch $dx = (h^{-1})'(u)du$, weil eben für die Ableitung von $x = h^{-1}(u)$ gilt: $dx/du = (h^{-1})'(u)$.

Beispiel 7.16. a) Gesucht ist $\int x\sqrt{1-x^2}dx$. Wir vereinfachen das Integral durch Substitution $1-x^2=u$. Dann gilt $du=-2xdx$. Deshalb erhält man

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\cdot(-2x)dx \;=\; -\frac{1}{2}\int\sqrt{u}\,du$$

$$= -\frac{1}{3}u^{3/2}+c \;=\; -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}+c \;=\; -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+c.$$

b) Gesucht ist $\int \frac{x^3+x}{x^4+2x^2}dx$. Da der Zähler fast übereinstimmt mit der Ableitung vom Nenner, substituieren wir $t=x^4+2x^2$. Dann gilt $dt=(4x^3+4x)dx$ und deshalb

$$\int\frac{x^3+x}{x^4+2x^2}dx = \frac{1}{4}\int\frac{(4x^3+4x)dx}{x^4+2x^2} \;=\; \frac{1}{4}\int\frac{1}{t}dt$$

$$= \frac{1}{4}\ln(t)+c \;=\; \frac{1}{4}\ln(x^4+2x^2)+c.$$

Für das **bestimmte Integral** erhalten wir die folgende zu Satz 7.15 analoge Regel:

Satz 7.17. *Es sei f stetig und h stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\boxed{\int_a^b f(h(x))\cdot h'(x)\,dx = \int_{h(a)}^{h(b)} f(u)\,du.} \tag{5}$$

Ist zusätzlich h umkehrbar mit Umkehrfunktion h^{-1}. Dann gilt

$$\boxed{\int_a^b f(h(x))\,dx = \int_{h(a)}^{h(b)} f(u)\cdot(h^{-1})'(u)\,du.} \tag{6}$$

Hier ist also zu beachten, dass auch die Integrationsgrenzen entsprechend der Substitutionsfunktion zu transformieren sind.

Beispiel 7.18. Gesucht ist $\int_1^2 x^3\sqrt{x^4-1}\,dx$. Wir substituieren

$$t=h(x)=x^4-1 \quad\Rightarrow\quad dt=4x^3\,dx.$$

Die Integrationsgrenzen $x_1=1$ und $x_2=2$ müssen entsprechend transformiert werden:

$$t_1=h(x_1)=1^4-1=0,\quad t_2=h(x_2)=2^4-1=15.$$

Also ist

$$\int_1^2 x^3\sqrt{x^4-1}\,dx \;=\; \frac{1}{4}\int_0^{15}\sqrt{t}\,dt = \left[\frac{1}{6}t^{3/2}\right]_0^{15} \approx 9.6825.$$

Alternativ könnte man die Stammfunktion durch “Resubstitution” gewinnen, und dann die ursprünglichen Integrationsgrenzen verwenden:

$$\int x^3\sqrt{x^4-1}\,dx \;=\; \frac{1}{4}\int\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{6}(x^4-1)^{3/2}+c.$$

Daraus folgt für das bestimmte Integral

$$\int_1^2 x^3\sqrt{x^4-1}\,dx = \left[\frac{1}{6}(x^4-1)^{3/2}\right]_1^2 \approx 9.6825.$$

7.4 Uneigentliche Integrale

Manchmal interessiert man sich für Integrale über unendliche Intervalle.

Definition 7.19. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Falls der Grenzwert $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ existiert, so schreibt man

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Man sagt dann, dass das **uneigentliche Integral** $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergiert. Falls der Grenzwert nicht existiert, sagt man, dass das Integral divergiert. Analog definiert man im Falle der Existenz der Grenzwerte

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

und

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Solche uneigentlichen Integrale spielen beispielsweise in der Statistik eine wichtige Rolle. Dort nennt man eine nichtnegative Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ Dichte, falls

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = 1.$$

Ein Beispiel für eine solche Dichte ist die Dichte der sogenannten Exponentialverteilung, welche gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

mit einem positiven Parameter $\alpha > 0$.
Eine wichtige Größe in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die sogenannte Verteilungsfunktion

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dies ist dann eine monoton wachsende Funktion mit

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$

Im Falle der obigen Exponentialverteilung erhalten wir für $x > 0$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)\,dt = \int_{-\infty}^0 0\,dt + \int_0^x \alpha e^{-\alpha t}\,dt \\ &= \Big[-e^{-\alpha t} \Big]_0^x = -e^{-\alpha x} - (-e^{-\alpha 0}) \\ &= 1 - e^{-\alpha x}. \end{aligned}$$

Für $x < 0$ gilt $F(x) = 0$, und wir sehen, dass tatsächlich gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = \lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} (1 - e^{-\alpha x}) = 1.$$

Beispiel 7.20. Wir betrachten das Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^a}\, dx.$$

Im Falle $a > 1$ erhalten wir für $b > 1$

$$\int_1^{b} \frac{1}{x^a}\, dx = \int_1^{b} x^{-a}\, dx = \left[\frac{x^{1-a}}{1-a}\right]_1^b = \frac{1}{1-a}(b^{1-a} - 1). \tag{7}$$

Damit ergibt sich für $a > 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^a}\, dx = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-a}(b^{1-a} - 1) = \frac{1}{a-1}.$$

Im Fall $a = 1$ erhalten wir

$$\int_1^{b} \frac{1}{x}\, dx = \ln(b) - \ln(1) = \ln(b) \to \infty$$

für $b \to \infty$, und somit divergiert das Integral. Ebenso divergiert das Integral für $a < 1$, da die rechte Seite in Gleichung (7) gegen unendlich geht.

Analog zu Integralen über unbeschränkte Intervalle definiert man Integrale für unbeschränkte Funktionen, die Pole besitzen. Als Beispiel betrachte man die Funktion $f(x) = 1/\sqrt{x}$. Da kann man fragen, ob die Fläche unter dieser Funktion im Intervall $(0, 2)$ endlich ist, und falls ja, welchen Wert sie hat. Da $f(0)$ nicht definiert ist, und $\lim_{h\to 0} f(h) = \infty$ gilt, behilft man sich wieder mit dem entsprechenden Grenzwert. Allgemein definiert man für den Fall, dass $f(x)$ an der Stelle $x = a$ nicht definiert ist, das uneigentliche Integral

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{h\to 0+} \int_{a+h}^{b} f(x)\, dx,$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert, und analog, falls $f(x)$ an der Stelle $x = b$ nicht definiert ist, das uneigentliche Integral

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{h\to 0+} \int_{a}^{b-h} f(x)\, dx.$$

Mit dieser Definition erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx &= \lim_{h\to 0+} \int_h^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \\ &= \lim_{h\to 0+} \Big[2\sqrt{x}\Big]_h^2 = \lim_{h\to 0+} (2\sqrt{2} - 2\sqrt{h}) \\ &= 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$